

СПИСОК ЗАДАЧ
вступительного экзамена по группе специальностей "Физические науки"
(физико-математические науки)

Механика

1. Заяц бежит по прямой со скоростью V_1 . Его начинает преследовать со скоростью V_2 собака, которая в ходе погони всегда бежит в направлении строго на зайца. В начальный момент времени расстояние между ними равно a и направления их движения ортогональны. Найти уравнение траектории собаки в системе отсчета, связанной с зайцем.

2. Космический корабль движется по эллиптической орбите вокруг планеты массы M , так что минимальное расстояние до силового центра равно a , а максимальное равно b . Найти скорость, которую необходимо ему сообщить в афелии, так чтобы он стал двигаться по параболе.

3. Частица массы m и зарядом e движется по сфере радиуса R в поле силы тяжести и однородном постоянном магнитном поле, напряженности H_0 , направленном в противоположную сторону от силы тяжести. Построить функцию Лагранжа, найти интегралы движения и закон движения в квадратурах.

4. Два небесных тела масс m_1 и m_2 движутся вокруг общего центра масс. Минимальное расстояние между ними равно a , а максимальное b . Определить энергию системы тел, а также момент импульса в системе отсчета, где центр масс покоится.

5. Частица массы m движется в потенциале $U(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}$, где $\alpha, \beta > 0$. Найти смещение перигелия траектории за период для случая финитного движения.

6. Записать функцию Лагранжа релятивистской частицы массы m и с зарядом e в произвольном электромагнитном поле и построить по ней функцию Гамильтона, взяв декартовы координаты частицы в качестве обобщенных.

7. Подвергнуть одномерный гармонический осциллятор унивалентному каноническому преобразованию с производящей функцией $F = \frac{1}{2}m\omega q^2 \operatorname{ctg} Q$. Найти явный вид преобразования. Построить новый гамильтониан K . Записать новые уравнения Гамильтона и их решить. Зная решения последних, записать решения старых уравнений Гамильтона.

8. Методом Гамильтона-Якоби найти закон движения в квадратурах для частицы с массой m и зарядом e , совершающей плоское движение в поле электрического диполя. Диполь находится в плоскости движения. Вектор дипольного момента имеет модуль p и также лежит в плоскости движения.

9. К стенке прикреплена спица, на которую нанизаны две бусинки массами $3m$ и m . Между собой бусинки соединены пружиной жесткостью k . Бусинка массы $3m$ присоединена к стенке пружиной жесткостью k . При этом стенка совершает малые колебания по закону $x_{\text{ст}} = A \sin \Omega t$. Система находится в горизонтальной плоскости, трением пренебречь. Найти закон установившихся вынужденных колебаний и условия резонанса.

10. Вычислить переменную «действие» для одномерного гармонического осциллятора. Используя данный результат, найти как будет меняться амплитуда малых колебаний маятника при медленном изменении длины нити $l(t)$.

11. Функция Лагранжа симметричного волчка с неподвижной точкой имеет вид $L = \frac{J_1}{2}(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\dot{\phi}^2) + \frac{J_3}{2}(\dot{\psi} + \cos\theta\dot{\phi})^2 - mgL\cos\theta$. Объясните смысл входящих в функцию Лагранжа величин. Найдите минимальное значение частоты вращения волчка вокруг вертикальной оси симметрии, при котором движение является устойчивым.

12. В случае стационарного течения несжимаемой идеальной жидкости в трубке длиной L , наклоненной под углом α к горизонту, найдите соотношения между скоростями течения на концах трубки, сечения в которых равны S_1 и S_2 . Плотность жидкости ρ .

Молекулярная физика, статистическая физика и термодинамика

13. Определите массу воздуха, заключенного между двумя оконными рамами, при атмосферном давлении p_0 , считая, что температура между рамами меняется по линейному закону от T_1 до T_2 . Площадь окна равна S , расстояние между рамами l . Молярная масса воздуха μ .

14. Найдите зависимость давления от объема для процесса, проводимого над одноатомным идеальным газом, при котором молярная теплоемкость газа меняется с температурой по закону $C = \alpha T$, где α – постоянная.

15. Газ Ван-дер-Ваальса в количестве двух молей адиабатически и квазистатически расширяется от объема V_1 до объема V_2 . Начальная температура газа T_1 . Найдите работу, совершенную газом. Константы Ван-дер-Ваальса a и b и его молярную теплоемкость при постоянном объеме c_V считайте известными.

16. Найдите термодинамические потенциалы: свободную энергию F и энтальпию H для моля одноатомного идеального газа.

17. С одним молем идеального газа проводят процесс $p = p_0 - aV^2$, где a — постоянная величина. Найдите максимально возможную температуру газа в этом процессе. Проиллюстрируйте это решение на p - V диаграмме.

18. Теплоизолированный цилиндрический сосуд разделен невесомым поршнем на две равные части. По одну сторону поршня находится идеальный газ массой M с молярной массой μ и молярными теплоемкостями C_V и C_p , не зависящими от температуры, а по другую сторону поршня – вакуум. Начальные температура и давление газа T_0 и p_0 . Поршень отпускают, и он, свободно передвигаясь, дает возможность газу заполнить весь объем цилиндра. После этого медленно доводят объем газа до первоначальной величины. Найдите изменение внутренней энергии и энтропии

19. Какое количество теплоты надо подвести к одному молю газа Ван-дер-Ваальса, чтобы при расширении в пустоту от объема V_1 до объема V_2 его температура не изменилась? Постоянные a и b газа Ван-дер-Ваальса известны.

20. На броуновскую частицу массой m_0 , совершающую случайные блуждания вдоль оси Ox , действует сила вязкого трения $\gamma \frac{dx}{dt}$ и случайная сила толчков со стороны окружающих ее молекул. Найдите корреляционную функцию для скорости частицы.

Электродинамика

21. По круглой тонкой пластинке радиусом R равномерно распределен заряд Q . Найдите напряженность поля на оси, перпендикулярной к плоскости пластинки, как функцию расстояния z от ее центра. Исследуйте полученное выражение при $z \ll R$ и $z \gg R$.

22. Заряд электронного облака в атоме водорода в основном состоянии распределен по закону $\rho(r) = \frac{q}{\pi a^3} e^{-2r/a}$, где q – заряд электронной оболочки, a – боровский радиус. Вычислите напряженность электрического поля, созданного электронной оболочкой.

23. Заряд q расположен на расстоянии a от плоской границы раздела двух полупространств с диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2 . Найдите его потенциал и действующую на него силу.

24. Тонкий диск радиуса a , заряженный с постоянной поверхностной плотностью заряда σ , равномерно вращается с угловой скоростью $\vec{\omega}$. Найдите отношение модуля магнитного момента диска \vec{m}_1 , в случае, если ось вращения проходит через его центр и перпендикулярна плоскости диска, к модулю магнитного момента диска \vec{m}_2 , когда ось вращения проходит через его диаметр.

25. По сфере радиуса R распределен заряд с поверхностной плотностью $\sigma = \sigma_0 \cos \vartheta$, где ϑ – угол, образуемый радиус-вектором, проведенным из центра сферы в произвольную точку сферы, с осью OZ . Найдите напряженность электрического поля в произвольной точке вне и внутри сферы.

26. Найдите векторный потенциал и индукцию магнитного поля, создаваемого контуром с током I в произвольной точке пространства на расстояниях от контура, намного больших, чем его линейные размеры.

27. Сфера радиусом R , заряженная с поверхностной плотностью σ , вращается вокруг оси симметрии с угловой скоростью ω . Найдите индукцию магнитного поля на оси вращения.

28. Металлический шар радиуса R зарядили зарядом Q . На расстоянии $d > R$ от его центра поместили точечный заряд q . Чему равен потенциал шара? Чему равна сила, действующая на точечный заряд?

29. Доказать, что если частица совершает периодическое движение, то средняя за период скорость потерь энергии совпадает со средней интенсивностью излучения.

Оптика

30. Две плоские монохроматические линейно поляризованные волны одной частоты распространяются вдоль оси z . Первая волна поляризована по оси x и имеет амплитуду a , а вторая поляризована по оси y , имеет амплитуду b и опережает первую по фазе на χ . Найдите поляризацию результирующей волны.

31. От двух когерентных точечных источников света получена интерференционная картина на экране, удаленном от источников на расстояние $L = 2$ м., и расположенном параллельно прямой, проходящей через источники. Во сколько раз изменится ширина интерференционных полос, если между источниками и экраном поместить собирающую линзу с фокусным расстоянием $f = 40$ см так, чтобы источники оказались в ее фокальной плоскости? Расстояние между источниками много меньше f и L .

32. Параллельный пучок монохроматического света с длиной волны $\lambda = 600$ нм падает нормально на непрозрачный экран с круглым отверстием диаметром $D = 1,2$ мм. На расстоянии $b = 10$ см за экраном на оси отверстия наблюдается темное пятно. На какое минимальное расстояние Δb нужно отодвинуть экран от этой точки вдоль оси отверстия, чтобы в центре дифракционной картины вновь наблюдалось темное пятно?

33. Параллельный пучок монохроматического света с длиной волны $\lambda = 500$ нм и интенсивностью I_0 падает на непрозрачный экран с круглым отверстием диаметром $D = 2$ мм. Найдите координату точки, лежащей на оси отверстия, для которой в пределах отверстия укладывается n зон Френеля. Постройте приближенно график зависимости интенсивности света на оси отверстия от расстояния до точки наблюдения.

Квантовая физика

34. Найти уровни энергии в потенциале $V(x) = -V_0\delta(x-a) - V_0\delta(x+a) + U_0\delta(x)$. Найти зависимость количества уровней от параметров системы.

35. Симметричный двумерный гармонический осциллятор в начальный момент

времени находится в состоянии $|\Psi(t=0)\rangle = (|i10\rangle + |01\rangle + |00\rangle)/3^{1/2}$. Найти волновую функцию $|\Psi(t)\rangle$ и средние значения величин x, y, p_x, p_y в произвольный момент времени t .

36. Гамильтониан системы двух частиц со спином $1/2$ имеет вид $H = -2\mu_0 (s_z^{(1)} - s_z^{(2)})H_z$. Найти вероятность того, что полный спин системы равен нулю в момент времени t , если в момент времени $t=0$ спин первой частицы был ориентирован вдоль оси x , а второй – против оси x .

37. Одномерный гармонический осциллятор. Найти поправки к энергии n -го уровня, вызванные возмущением αx^4 .

38. Найти в квазиклассическом приближении уровни энергии в потенциале $V(x<0)=\infty, V(x>0)=kx^2/2$. Сравнить с точным ответом.

39. Заряженный двумерный симметричный гармонический осциллятор помещен в слабое однородное магнитное поле, ориентированное по оси z . В первом порядке теории возмущений найти поправки к энергии второго возбужденного уровня $3\hbar\omega$, вызванные магнитным полем.

40. Найдите явный вид матриц-операторов компонент углового момента \hat{J}_i в состоянии с полным моментом $J=1$.

41. Найти парамагнитную составляющую магнитной восприимчивости свободного фермионного газа (спин частиц $1/2$) при нулевой температуре.

42. Решите уравнение Гайзенберга для операторов орбитального момента l_x, l_y, l_z , если гамильтониан системы равен $H = -\mu_0 H_x l_x$.

43. Источник потенциала Юкавы равномерно распределен по шару радиуса R с плотностью заряда ρ_0 . Найти формфактор и дифференциальное сечение упругого рассеяния.

Ядерная физика

44. Определить расстояние, которое пройдет в вакууме пучок нейтронов с энергией 3 МэВ, при котором интенсивность пучка уменьшится в 1000 раз. Период полураспада нейтрона принять равным 15 минутам.

45. Рассчитать приведенную длину волны λ (в Фм) протона с кинетической энергией 1 ГэВ.

46. Рассчитать минимальную кинетическую энергию (в МэВ) протонов в реакции рождения нейтрального пиона на неподвижной водородной мишени: $p + p \rightarrow p + p + \pi^0$.

47. Для распада ${}^3_1\text{H} \rightarrow {}^3_2\text{He} + e^- + \bar{\nu}_e$ найти верхнюю границу (в МэВ) спектра электронов. (Значения энергий связи: $W({}^3\text{H})=8.481$ МэВ; $W({}^3\text{He})=7.718$ МэВ).

48. Определить наиболее вероятный тип (E - электрический / M - магнитный) и мультипольность J γ -кванта, излучаемого при переходе ядра ${}^{13}\text{C}$ из первого возбужденного состояния ($J^P = 1/2^+$) в основное состояние ($J^P = 1/2^-$).

49. Оценить среднее время (в секундах) жизни нейтрального ρ -мезона, если ширина пика в зависимости эффективного сечения его образования от энергии составляет 150 МэВ.

50. Рассчитать кинетическую энергию (в МэВ) α -частиц в распаде ${}^{222}_{86}\text{Rn} \rightarrow {}^{218}_{84}\text{Po} + {}^4_2\text{He}$. Энергии связи:

$$W({}^{222}\text{Rn})=1708.2 \text{ МэВ}, W({}^{218}\text{Po})=1685.5 \text{ МэВ}, W({}^4\text{He})=28.3 \text{ МэВ}$$

51. Для распада ${}^{14}_6\text{C} \rightarrow {}^{14}_7\text{N} + e^- + \bar{\nu}_e$ найти верхнюю границу (в МэВ) спектра электронов. (Значения энергий связи: $W({}^{14}\text{C})=105.284$ МэВ ; $W({}^{14}\text{N})=104.658$ МэВ).