«Утверждено»
Председатель экзаменационной комиссии
профессор А.А. Федянин

____
«__» ____________ 20__ г.

СПИСОК ЗАДАЧ
вступительного экзамена по направлению 03.06.01 «Физика и астрономия»
(физико-математические науки)

Механика

1. На сферическую поверхность радиусом R положили цепочку длиной l ($l < \pi R/2$) и закрепили один из ее концов на вершине сферы. С каким по величине ускорением начнет двигаться цепочка, если ее верхний конец освободить? Трением пренебречь.

2. Из тонкого резинового жгута массой m с коэффициентом упругости k изготовили кольцо радиусом r. Кольцо раскрутили вокруг его оси, перпендикулярной плоскости кольца, с угловой скоростью ω. Какой радиус R будет иметь вращающееся кольцо? Притяжение земли не учитывать.

3. Бусинка скользит по проволочному кольцу, расположенному горизонтально. Коэффициент трения между бусинкой и проволокой равен μ. Во сколько раз n уменьшится кинетическая энергия бусинки после прохождения ею пути, при котором вектор скорости бусинки повернется на угол $\Delta\varphi$? Действием сил тяжести и сопротивления воздуха пренебречь.

4. На столе покоятся два одинаковых шарика массой m каждый, скрепленные невесомой пружиной длина которой l, а жесткость k. Одному из шариков сообщили ударом скорость v в направлении, перпендикулярном прямой, соединяющей их центры. Определите эту скорость, если известно, что при движении шариков пружина растягивалась до максимальной длины, равной L. Трением пренебречь.

5. На гладкой горизонтальной плоскости лежит стержень, имеющий массу M и длину L. В стержень ударяется шарик массой m, движущийся перпендикулярно стержню. На каком расстоянии l от середины стержня должен произойти абсолютно упругий удар, чтобы угловая скорость вращения стержня после удара была максимальной?

6. На гладкой горизонтальной поверхности лежит тонкий однородный стержень длиной L. По одному из концов стержня наносят горизонтальный удар в направлении, перпендикулярном стержню. На какое расстояние S сместится центр масс стержня за время его полного оборота?

7. Две зеркально симметричные горки массой M каждая могут свободно перемещаться вдоль прямой по горизонтальной плоскости. На одной из горок на высоте h находится материальная точка массы m. Выйдя из состояния неустойчивого равновесия, она соскальзывает с горки, движется по плоскости и въезжает на другую горку. На какую максимальную высоту она может подняться.

8. Изогнутая тонкая трубка расположена в вертикальной плоскости так, что одна ее часть составляет с горизонтом угол α, а другая угол β. В трубку находится некоторое количество воды. Найти период малых колебаний жидкости, если ее общая длина в трубке l. При колебаниях вода из трубки не вытекает.

9. Однородный цилиндр массой m и радиусом a катится без проскальзывания по внутренней стороне цилиндрической поверхности радиусом $R>a$. Найдите кинетическую энергию цилиндра в момент, когда угловая скорость движения оси цилиндра относительно оси цилиндрической поверхности равна ω.

10. Запишите функцию Лагранжа и найдите уравнение плоского движения математического маятника массой m, длина подвеса которого меняется по закону $l(t)$.

11. Груз подвешен на невесомой эластичной нити (на резинке) в поле силы тяжести. В результате нить растянулась на длину Δl. Груз оттянули вниз так, что растяжение нити стало равно $3\Delta l$, и отпустили без начальной скорости. Найдите период вертикальных колебаний груза. Потерями механической энергии можно пренебречь.

12. Частица массой m и зарядом q движется в однородном магнитном поле $\boldsymbol{H}$ с начальным импульсом $\boldsymbol{p}_0$. Запишите функцию Лагранжа и первые интегралы движения в цилиндрических координатах.

13. В случае стационарного течения несжимаемой идеальной жидкости в горизонтально расположенной трубке найдите соотношения между скоростями и давлениями в поперечных сечениях S_1 и S_2. Плотность жидкости ρ.

Молекулярная физика, статистическая физика и термодинамика

14. Определите массу воздуха, заключенного между двумя оконными рамами, при атмосферном давлении p_0, считая, что температура между рамами меняется по линейному закону от T_1 до T_2. Площадь окна равна S, расстояние между рамами l. Молярная масса воздуха μ.

15. Найдите зависимость давления от объема для процесса, проводимого над одноатомным идеальным газом, при котором молярная теплоемкость газа меняется с температурой по закону $C = \alpha T$, где α – постоянная.

16. Газ Ван-дер-Ваальса в количестве двух молей адиабатически и квазистатически расширяется от объема V_1 до объема V_2. Начальная температура газа T_1. Найдите работу, совершенную газом. Константы Ван-дер-Ваальса a и b и его молярную теплоемкость при постоянном объеме c_V считайте известными.

17. Найдите термодинамические потенциалы: свободную энергию F и энтальпию H для моля одноатомного идеального газа.

18. С одним молем идеального газа проводят процесс $p = p_0 - aV^2$, где a — постоянная величина. Найдите максимально возможную температуру газа в этом процессе. Проиллюстрируйте это решение на p-V диаграмме.

19. Теплоизолированный цилиндрический сосуд разделен невесомым поршнем на две равные части. По одну сторону поршня находится идеальный газ массой M с молярной массой μ и молярными теплоемкостями C_V и C_p, не зависящими от температуры, а по другую сторону поршня – вакуум. Начальные температура и давление газа T_0 и p_0. Поршень отпускают, и он, свободно передвигаясь, дает возможность газу заполнить весь объем цилиндра. После этого медленно доводят

объем газа до первоначальной величины. Найдите изменение внутренней энергии и энтропии

20. Идеальный газ, состоящий из N молекул, дипольный момент каждой из которых $\vec{p}$, помещен в однородное электрическое поле напряженностью $\vec{E}$. Вычислите величину вектора поляризации газа. Температура газа T.

21. Используя статистическую сумму, найдите уравнение состояния и внутреннюю энергию N молекул одноатомного идеального газа. Масса одной молекулы равна m_0.

22. Газ Ван-дер-Ваальса в количестве ν молей при температуре T занимает объем V_0. Найти изменение его внутренней энергии ΔU; работу A, которую совершит газ при квазистатическом изотермическом расширении до объема $2V_0$, и полученную при этом теплоту Q. Постоянные газа a и b считать известными. Конденсации газа в описываемом процессе не происходит.

23. Какое количество теплоты надо подвести к одному молю газа Ван-дер-Ваальса, чтобы при расширении в пустоту от объема V_1 до объема V_2 его температура не изменилась?

24. Найти в переменных p, V уравнение политропы для одного моля газа Ван-дер-Ваальса, теплоемкость C_V которого не зависит от температуры. Теплоемкость политропического процесса равна C. Постоянные a и b газа Ван-дер-Ваальса известны.

25. На броуновскую частицу массой m_0, совершающую случайные блуждания в одномерном пространстве, действует сила вязкого трения $\gamma \dfrac{dx}{dt}$ и случайная сила толчков со стороны окружающих ее молекул. Найдите корреляционную функцию для скорости частицы.

Электродинамика

26. По круглой тонкой пластинке радиусом R равномерно распределен заряд Q. Найдите напряженность поля на оси, перпендикулярной к плоскости пластинки, как функцию расстояния z от ее центра. Исследуйте полученное выражение при $z << R$ и $z >> R$.

27. Две нити, совпадающие с положительными полуосями OX и OY декартовой системы координат XOY, равномерно заряжены с линейной плотностью κ. Найдите напряженность электрического поля в точке с координатами $x = a$, $y = a$, где $a > 0$.

28. Заряд q расположен на расстоянии a от плоской границы раздела двух полупространств с диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2. Найдите его потенциал и действующую на него силу.

29. Найдите энергию взаимодействия двух диполей с дипольными моментами $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$, находящихся на расстоянии $r >> l_i$ друг от друга (l_i – размер i - го диполя).

30. По сфере радиуса R распределен заряд с поверхностной плотностью $\sigma = \sigma_0 \cos\vartheta$, где

ϑ – угол, образуемый радиус-вектором, проведенным из центра сферы в произвольную точку сферы, с осью OZ. Найдите напряженность в произвольной точке вне и внутри сферы.

31. Найдите векторный потенциал и индукцию магнитного поля, создаваемого контуром с током I в произвольной точке пространства на расстояниях от контура, намного больших, чем его линейные размеры.

32. Сфера радиусом R , заряженная с поверхностной плотностью σ, вращается вокруг оси симметрии с угловой скоростью ω. Найдите индукцию магнитного поля на оси вращения.

33. Металлический шар радиуса R зарядили зарядом Q. На расстоянии $d > R$ от его центра поместили точечный заряд q. Чему равен потенциал шара? Чему равна сила, действующая на точечный заряд?

34. Доказать, что если частица совершает периодической движение, то средняя за период скорость потерь энергии совпадает со средней интенсивностью излучения.

Оптика

35. Две плоские монохроматические линейно поляризованные волны одной частоты распространяются вдоль оси z. Первая волна поляризована по оси x и имеет амплитуду a, а вторая поляризована по оси y, имеет амплитуду b и опережает первую по фазе на χ. Найдите поляризацию результирующей волны.

36. От двух когерентных точечных источников света получена интерференционная картина на экране, удаленном от источников на расстояние L = 2 м., и расположенном параллельно прямой, проходящей через источники. Во сколько раз изменится ширина интерференционных полос, если между источниками и экраном поместить собирающую линзу с фокусным расстоянием f = 40 см так, чтобы источники оказались в ее фокальной плоскости? Расстояние между источниками много меньше f и L.

37. Параллельный пучок монохроматического света с длиной волны λ = 600 нм падает нормально на непрозрачный экран с круглым отверстием диаметром D = 1,2 мм. На расстоянии b = 10 см за экраном на оси отверстия наблюдается темное пятно. На какое минимальное расстояние Δb нужно отодвинуть экран от этой точки вдоль оси отверстия, чтобы в центре дифракционной картины вновь наблюдалось темное пятно?

38. Параллельный пучок монохроматического света с длиной волны λ = 500 нм и интенсивностью I_0 падает на непрозрачный экран с круглым отверстием диаметром 2 мм. Найдите координату точки, лежащей на оси отверстия, для которой в пределах отверстия укладывается n зон Френеля. Постройте приближенно график зависимости интенсивности света на оси отверстия от расстояния до точки наблюдения.

Квантовая физика

39. Частица массой m совершает одномерное движение в поле, потенциал которого является суперпозицией двух симметричных δ-функций: $U(x) = -q\delta(x-a) - q\delta(x+a)$. При каких значениях параметра $Q = 2mqa\eta^{-2}$ существуют два связанных состояния?

40. Показать, что для частицы, движущейся в гармоническом потенциале $V = m\omega^2 x^2/2$, изменение во времени среднего значения координаты $\langle x(t) \rangle$ определяется классическим законом движения.

41. Гармонический осциллятор (масса частицы m, частота ω) находится в начальный момент времени $t = 0$ в состоянии с волновой функцией $\Psi(x,t=0) = \frac{1}{\sqrt{3}}\varphi_1(x) + i\sqrt{\frac{2}{3}}\varphi_2(x)$, где $\varphi_n(x)$ – волновая функция n-го стационарного состояния. Вычислите зависимость от времени среднего значения оператора координаты для этой системы.

42. Частица массой m находится в одномерном потенциале: $U(x) = 0$ при $|x| < a$ и $U(x) = \infty$ при $|x| > a$ в состоянии с волновой функцией $y(x) = \zeta(a^2 - x^2)$ при $|x| \leq a$, $y(x) = 0$ при $|x| > a$, где ζ – нормировочный множитель. Вычислите среднее значение энергии в этом состоянии. Во сколько раз оно отличается от энергии основного состояния.

43. Найдите коэффициент прохождения частицы массы m с начальной энергией E через потенциальный барьер высотой U и шириной a.

44. Частица с массой m и зарядом e находится в основном состоянии в потенциале изотропного гармонического осциллятора $U(r) = \frac{m\omega^2}{2} r^2$. Вычислите статическую поляризуемость этой системы.

45. Найдите явный вид матриц-операторов компонент углового момента $\vec{J}_i$ в состоянии с полным моментом $J = 1$.

46. Вычислите энергию Ферми для двумерного газа тождественных невзаимодействующих фермионов, концентрация которых n. Масса частицы m, спин $s = 1/2$.

47. Оцените, при каких температурах распределение Бозе-Эйнштейна идеального газа переходит в распределение Больцмана.

48. Вычислите в первом борновском приближении полное сечение рассеяния в поле с потенциалом $U(x) = -q\delta(\mathbf{r}) - q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{a})$, где вектор **a** направлен вдоль направления потока падающих частиц.

Ядерная физика

49. Определить расстояние, которое пройдёт в вакууме пучок нейтронов с энергией 3 МэВ, при котором интенсивность пучка уменьшится в 1000 раз. Период полураспада нейтрона принять равным 15 минутам.

50. Рассчитать приведённую длину волны D (в Фм) протона с кинетической энергией 1 ГэВ.

51. Рассчитать минимальную кинетическую энергию (в МэВ) протонов в реакции

рождения нейтрального пиона на неподвижной водородной мишени: $p+p\rightarrow p+p+\pi^0$.

52. Для распада ${}^3_1H\rightarrow {}^3_2He+e^-+\bar{\nu}_e$ найти верхнюю границу (в МэВ) спектра электронов. (Значения энергий связи: W(^{3}H)=8.481 МэВ; W(^{3}He)=7.718 МэВ).

53. Определить наиболее вероятный тип (Е -электрический / М -магнитный) и мультипольность J γ-кванта, излучаемого при переходе ядра ^{13}C из первого возбуждённого состояния (J^P = 1/2$^+$) в основное состояние (J^P = 1/2$^-$).

54. Оценить среднее время (в секундах) жизни нейтрального ρ-мезона, если ширина пика в зависимости эффективного сечения его образования от энергии составляет 150 МэВ.

55. Рассчитать кинетическую энергию (в МэВ) α-частиц в распаде ${}^{222}_{86}Rn\rightarrow {}^{218}_{84}Po+{}^4_2He$. Энергии связи:

W(^{222}Rn)=1708.2 МэВ, W(^{218}Po)=1685.5 МэВ, W(^{4}He)=28.3 МэВ

56. Для распада ${}^{14}_6C\rightarrow {}^{14}_7N+e^-+\bar{\nu}_e$ найти верхнюю границу (в МэВ) спектра электронов. (Значения энергий связи: W(14C)=105.284 МэВ ; W(14N)=104.658 МэВ).