

Общий список задач к ГЭ.

Теория групп:

1. Найти ядро гомоморфизма $\varphi: U(1) \rightarrow U(1)$, заданного уравнение $\varphi(z) = z^n$, где $z \in \mathbb{C}, |z| = 1$, а n – целое число, $n \in \mathbb{Z}$.

Решение:

Ядро гомоморфизма – это множество элементов группы, отображаемых в единицу:

$$\ker \varphi = \{z \in U(1), z^n = 1\}.$$

Таким образом, ядро рассматриваемого гомоморфизма состоит из комплексных чисел, удовлетворяющих уравнению $z^n = 1$, т.е. являющихся корнями степени n из единицы. Множество корней степени n из единицы образует группу Z_n . Поэтому $\ker \varphi = Z_n$.

2. Найти собственные значения оператора $L_z + a L_x$, $a \in \mathbb{R}$, в пространстве неприводимого представления группы $SU(2)$ со спином l .

Решение:

Представим оператор $L_z + a L_x$ в виде

$$c = \sqrt{1+a^2} \vec{L} \vec{n}, \vec{n} = \left(\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \right), \vec{n}^2 = 1.$$

Собственные значения оператора проекции момента на любую ось те же, что и собственные значения оператора L_z . Поэтому, собственные значения оператора $L_z + a L_x$ суть $\sqrt{1+a^2} m$, где m пробегает значения от $-l$ до l с шагом 1.

ОТО

1. Доказать, что движение точечной частицы в поле Шварцшильда является плоским

Нужно показать, что метрика Шварцшильда

$$ds^2 = \Delta dt^2 - dr^2/\Delta - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), \quad \Delta = 1 - r_g/r$$

имеет группу изометрии $SO(3)$. Вычислив символы Кристоффеля

$$\Gamma_{tt}^r = \frac{\Delta r_g}{2r^2}, \quad \Gamma_{tr}^t = -\Gamma_{rr}^r = \frac{r_g}{2\Delta r^2}, \quad \Gamma_{\theta\theta}^r = -r\Delta, \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^r = -r\sin^2\theta\Delta,$$

$$\Gamma_{r\theta}^\theta = \Gamma_{r\varphi}^\varphi = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta = -\sin\theta\cos\theta, \quad \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi = \text{ctg}\theta,$$

можно показать что векторы

$$L^1 = -\cos\varphi\partial_\theta + \text{ctg}\theta\partial_\varphi, \quad L^2 = \sin\varphi\partial_\theta + \text{ctg}\theta\partial_\varphi, \quad L^3 = -\partial_\varphi,$$

образующие алгебру $so(3)$

$$[L^i, L^j] = \epsilon^{ijk}L^k,$$

являются векторами Киллинга

$$\nabla_\nu L_\mu^i + \nabla_\mu L_\nu^i = 0,$$

и значит свертка касательного вектора к геодезической $\dot{x}^\mu$ с каждым из них является интегралом движения: $I^i = \dot{x}^\mu L_\mu^i$, $dI^i/ds = 0$. Эти три интеграла образуют вектор в трехмерном евклидовом пространстве, в которое можно погрузить единичную сферу. Плоскость движения будет ортогональна этому вектору.

2. Вычислить тензор кривизны и тензор Риччи единичной трехмерной сферы S^3 .

Это пространство является максимально симметричным, поэтому для него тензор кривизны и тензор Риччи выражаются через метрику следующим образом

$$R_{\mu\nu\lambda\tau} = \frac{R}{6}(g_{\mu\lambda}g_{\nu\tau} - g_{\mu\tau}g_{\nu\lambda}), \quad R_{\nu\tau} = \frac{R}{3},$$

где R скаляр кривизны. Элемент на трехмерной сфере параметризуется углами $0 \leq \psi \leq \pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ следующим образом

$$dl^2 = d\psi^2 + \sin^2\psi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2),$$

откуда прочитывается метрический тензор, индексы $\mu, \nu, \dots$ пробегает значения ψ, θ, φ .

3. Записать уравнения Максвелла для 4-потенциала в ковариантной калибровке Лоренца в невакуумном гравитационном поле.

Уравнения Максвелла в искривленном пространстве-времени записываются в виде

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} = -4\pi j^\mu$$

где $F_{\nu\mu} = \nabla_\nu A_\mu - \nabla_\mu A_\nu$. Выбираем ковариантную калибровку Лоренца $\nabla_\nu A^\nu = 0$. Имеем:

$$\nabla_\nu(\nabla^\mu A^\nu - \nabla^\nu A^\mu) = \nabla^\mu \nabla_\nu A^\nu + [\nabla_\nu, \nabla^\mu]A^\nu - \nabla_\nu \nabla^\nu A^\mu$$

Учитывая ковариантное постоянство метрики и тождество Риччи,

$$[\nabla_\nu, \nabla_\mu]A^\nu = -R_{\lambda\nu\mu}^\nu A^\lambda = -R_{\lambda\mu}A^\lambda,$$

получаем:

$$\square A^\mu + R_{\lambda}^\mu A^\lambda = 4\pi j^\mu, \quad \square = \nabla_\nu \nabla^\nu$$

4. Найти предельное значение прицельного параметра, при котором фотон еще отклоняется в поле Шварцшильда и не захватывается черной дырой.

Рассмотрим движение в экваториальной плоскости, где метрика Шварцшильда индуцирует трехмерную метрику

$$ds^2 = \Delta dt^2 - dr^2/\Delta - r^2 d\varphi^2, \quad \Delta = 1 - r_g/r.$$

Эта метрика имеет векторы Киллинга ∂_t , ∂_φ порождающие первые интегралы геодезических $x^\mu(\tau)$, где τ некоторый аффинный параметр, – энергию и угловой момент

$$E = \dot{t}g_{tt}, \quad L = -\dot{\varphi}g_{\varphi\varphi},$$

отношение которых является прицельным параметром $b = L/E$. Запишем условие изотропности мировой линии фотона $g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = 0$:

$$\dot{t}^2\Delta - \dot{r}^2/\Delta - \dot{\varphi}^2r^2 = 0$$

Выражая $\dot{t}$, $\dot{\varphi}$ через интегралы движения, получаем уравнение для определения радиального движения в виде

$$\dot{r}^2 + U = E^2, \quad U = \Delta L^2/r^2$$

Это можно понимать как уравнение энергии, где U потенциальная энергия. Уравнение допускает круговые орбиты фотонов, для чего должны выполняться условия

$$U = E^2, \quad U' = 0.$$

Разрешая эти условия находим радиус неустойчивой (поскольку соответствует максимуму потенциала) фотонной орбиты

$$r_\gamma = \frac{3}{2}r_g$$

Фотон прилетающий из бесконечности не может попасть на круговую орбиту, поскольку для этого его нужно посадить на нее и толкнуть по касательной. Но он может сделать несколько оборотов по близкой траектории и потом уйти на бесконечность, либо же упасть в черную дыру. Окружность $r = r_\gamma$ является границей между этими двумя типами движений. Ей соответствует определенное соотношение между моментом и энергией $E^2 = U(r_\gamma)$, откуда следует искомое критическое значение прицельного параметра

$$b = \frac{3\sqrt{3}}{2}r_g$$

5. За какое собственное время массивная частица, радиально падающая в черную дыру Шварцшильда из точки $r = 5r_g$, долетит до горизонта

Выбираем движение в экваториальной плоскости, и переменные как в задаче 4. Для массивной частицы квадрат касательного вектора, при выборе параметра $\tau = s/m$, где s интервал, m масса, будет иметь вид $g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = m^2$. Поэтому получаем уравнение радиального движения $L = 0$ в виде

$$\dot{r}^2 = E^2 - m^2\Delta$$

Отсюда получаем

$$d\tau = \frac{dr}{\sqrt{E^2 - m^2(1 - r_g/r)}} = \frac{ds}{m}$$

Поэтому искомый интервал собственного времени движения δs из точки $r_0 > r_g$ до точки r_g будет равен

$$\delta s = \int_{r_g}^{r_0} \frac{m dr}{\sqrt{E^2 - m^2(1 - r_g/r)}}.$$

Этот табличный интеграл конечен.

КХД:

1. Вычислить цветовой фактор в сечении рассеяния кварка на кварке (просуммированный по цветам конечных кварков и усреднённый по цветам начальных кварков) для t-канальной диаграммы.
2. Вычислить цветовой фактор для интерференционного члена в сечении рассеяния (просуммированного по цветам конечных кварков и усредненного по цветам начальных кварков), отвечающего t-канальной диаграмме рассеяния кварка на кварке того же аромата.
3. Вычислить цветовой фактор в сечении рассеяния кварка на глюоне (просуммированного по цветам конечных и усредненного по цветам начальных частиц) для амплитуды, даваемой s-канальной диаграммой.
4. Вычислить цветовой фактор в сечении рассеяния кварка на глюоне (просуммированного по цветам конечных и усредненного по цветам начальных частиц) для амплитуды, даваемой t-канальной диаграммой.

КТП

Задача 1

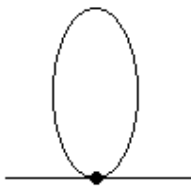
Пусть S_{int} часть действия, описывающая взаимодействия полей, Используя формулу для эффективных вершин теории

$$\Gamma_{\mu}(p_1; p_2; p_3)(2\pi)^4 \delta(p_1 + p_2 + p_3) = i \frac{\delta^{(3)} S_{\text{int}}}{\delta \bar{\psi}(p_1) \delta \psi(p_2) \delta A_{\mu}(p_3)}, \text{ покажите, что вершина}$$

взаимодействия квантовой электродинамики равна $-ieQ\gamma_{\mu}$.

Задача 2

С помощью размерной регуляризации в теории φ^4 с константой связи λ вычислить диаграмму «головастик»:



Окончательный результат выразить через гамма-функции.

Указание: Для упрощения вычислений использовать для пропагатора альфа-представление:

$$\frac{1}{(k^2 - m^2)^{\lambda}} = \frac{(-i)^{\lambda}}{\Gamma(\lambda)} \int_0^{\infty} d\alpha \alpha^{\lambda-1} \exp(i\alpha(k^2 - m^2))$$

а для вычисления петлевого интеграла – формулу гауссова интегрирования в d-измерениях.

$$\int d^d k \exp\left\{-i\left(Ak^2 + 2Bk\right)\right\} = i\left(\frac{\pi}{iA}\right)^{d/2} \exp\left\{-i\frac{B^2}{A}\right\}$$

Задачи.

1. Рассчитать разность давлений в цилиндрической трубе, если объемный расход воды составляет 10 куб. см в секунду, а радиус трубы – 1 см, длина трубы-1м. Сделать выводы о возможности применения модели ламинарного течения.
2. Рассчитать скорость всплытия маленького газового пузырька в жидкости. Задан радиус пузырька и все параметры жидкости. До какого радиуса пузырек можно считать «маленьким», то есть применима формула Стокса? Рассчитать этот радиус для воды.
3. В ударной трубе в камере низкого давления установлено давление p_0 для газа с показателем адиабаты γ_1 , в камере высокого давления – давление p_2 для газа с показателем адиабаты γ_2 . Температура везде равна T_0 . После разрыва диафрагмы была измерена скорость ударной волны и вычислено число Маха, то есть число Маха ударной волны $M \gg 1$ также известно. Найти отношение температур на контактном разрыве. Показатели адиабаты в газах считать постоянными.

Физическая кинетика

Задача 1.

Вычислить среднее значение отклонения от точки детерминированности $\langle y-x \rangle$ в одномерном случае, когда функция распределения имеет вид

$$\omega(y|x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left\{-\frac{(y-x)^2}{4Dt}\right\}$$

Задача 2.

Вычислить средний квадрат отклонения от точки детерминированности $\langle (y-x)^2 \rangle$ в одномерном случае, когда функция распределения имеет вид

$$\omega(y|x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left\{-\frac{(y-x)^2}{4Dt}\right\}$$

Задача 3.

При каких условиях плотность вероятности перехода

$$\omega(y|x, t) = \frac{1}{(\sqrt{4\pi Dt})^3} \exp\left\{-\frac{(y-x)^2}{4Dt}\right\}$$

удовлетворяет уравнению Фоккера-Планка. Обратит внимание на то что y и x – трехмерные вектора.

Задача 4.

Показать, что уравнение Больцмана необратимо, т.е. что если $F(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ – решение, то $F(\mathbf{x}, -\mathbf{v}, -t)$ не обязано быть решением

Современные проблемы физики, ч.1

1. Определить энергию фотонов, рассеянных назад при столкновении релятивистских электронов $E_e \gg m_e c^2$ с лазерными фотонами $E_\gamma \sim 1$ эВ (обратный Комптон-эффект).
2. В коллайдере LHeC (одна из предложенных модификаций БАК, ЦЕРН) электронный пучок 60 ГэВ будет сталкиваться с протонным пучком 7 ТэВ. Рассчитать полную энергию столкновения в системе центра масс и оценить, какая энергия электронного пучка потребовалась бы для создания эквивалентной установки с фиксированной мишенью.
3. а) Возможно ли протекание реакции $p + \bar{p} \rightarrow \bar{\Lambda} + \Lambda$ на неподвижной протонной мишени при кинетической энергии антипротонов 0.75 ГэВ. б) Какие должны быть минимальные энергии встречных пучков для того, чтобы реализовать эту реакцию. Массы в энергетических единицах $m_p = 938.27$ МэВ, $m_\Lambda = 1115.63$ МэВ.
4. При каких относительных орбитальных моментах количества движения протона возможна ядерная реакция $p + {}^7\text{Li} \rightarrow {}^8\text{Be}^* \rightarrow \alpha + \alpha$?

Теоретическая космология

1. В модели Λ CDM вычислить при каком красном смещении z происходит переход от замедленного расширения Вселенной к ускоренному. Дать численную оценку z .
2. Вычислить возраст гипотетической Вселенной без Λ -члена, но с пространственной кривизной. Считать современное значение параметра Хаббла таким же, как в нашей Вселенной ($H_0 = 1.42 \cdot 10^{10}$ лет). Найти численный ответ при $\Omega_M = 0.3$ и $\Omega_K = 0.7$.