

Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова  
Филиал Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова  
в городе Сарове

УТВЕРЖДАЮ

Директор филиала МГУ в городе  
Сарове

 /В.В. Воеводин/

## **РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)**

**Наименование дисциплины (модуля):**

**Теория разностных схем**

**Уровень высшего образования:**

**магистратура**

**Направление подготовки (специальность):**

**01.04.02 "Прикладная математика и информатика"**

**Направленность (профиль) ОПОП:**

**"Вычислительные методы и методика моделирования"**

**"Суперкомпьютерные технологии математического моделирования и обработки данных"**

---

**Форма обучения:**

**Очная**

Саров 2021

Рабочая программа дисциплины (модуля) разработана в соответствии с самостоятельно установленным МГУ образовательным стандартом (ОС МГУ) для реализуемых основных профессиональных образовательных программ бакалавриата, магистратуры, реализуемых последовательно по схеме интегрированной подготовки по направлениям 01.04.02 «Прикладная математика и информатика» в редакции приказа МГУ от 30 декабря 2016 г.

## РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

### 1. НАИМЕНОВАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Теория разностных схем.

### 2. УРОВЕНЬ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

Подготовка научно-педагогических кадров в магистратуре.

### 3. НАПРАВЛЕНИЕ ПОДГОТОВКИ, НАПРАВЛЕННОСТЬ (ПРОФИЛЬ) ПОДГОТОВКИ

Направление 01.04.02 «Прикладная математика и информатика». Направленность (профиль) «Математические и компьютерные методы решения задач естествознания». Образовательная программа «Численные методы и математическое моделирование».

### 4. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОСНОВНОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

Дисциплина входит в обязательную часть магистерской образовательной программы «Численные методы и математическое моделирование», изучается во 2-м семестре.

### 5. ПЕРЕЧЕНЬ ПЛАНИРУЕМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ

Дисциплина участвует в формировании следующих компетенций образовательной программы:

| Формируемые компетенции | Планируемые результаты обучения |
|-------------------------|---------------------------------|
|-------------------------|---------------------------------|

|   |   |
|---|---|
| <p>способность математически формулировать основные задачи математической физики, применять для их решения соответствующие численные методы (СПК-33).</p> | <p>З1 (СПК-33) Знать:<br/>основные понятия и утверждения теории разностных схем, способы аппроксимации дифференциальных операторов, встречающихся в задачах математической физики.<br/>У1 (СПК-33) Уметь<br/>аппроксимировать стандартные задачи математической физики, получать условия устойчивости и сходимости разностных схем, аппроксимирующих стандартные задачи.<br/>В1 (СПК-33) Владеть<br/>навыками построения разностных схем, основными методами доказательства априорных оценок для решения разностных схем.</p> |
|---|---|

Оценочные средства для промежуточной аттестации приведены в Приложении.

## 6. ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ

Объем дисциплины составляет 4 зачетные единицы, всего 144 часа.

54 часа составляет контактная работа с преподавателем – 34 часа занятий лекционного типа, 16 часов занятий семинарского типа (семинары, научно-практические занятия, лабораторные работы и т.п.), 0 часов индивидуальных консультаций, 1 час групповых консультаций, 3 час мероприятий текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации.

90 часов составляет самостоятельная работа учащегося.

## 7. ВХОДНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Учащиеся должны владеть знаниями по математическому анализу, линейной алгебре, обыкновенным дифференциальным уравнениям и краевым задачам, уравнениям математической физики, численным методам линейной алгебры в объеме, соответствующем основным образовательным программам бакалавриата по укрупненным группам направлений и специальностей 01.00.00 «Математика и механика», 02.00.00 «Компьютерные и информационные науки».

## 8. ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

В процессе обучения демонстрируются результаты расчетов по типичным разностным схемам, аппроксимирующим основные задачи математической физики.

## 9. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Рассматриваются разностные схемы, аппроксимирующие основные задачи математической физики: начально-краевые задачи для уравнений теплопроводности и колебания струны. Определяется порядок аппроксимации схем, а также изучаются условия устойчивости и сходимости схем. Обсуждаются основные методы построения разностных схем и доказательства априорных оценок для их решений.

Difference schemes approximating basic boundary value problems of mathematical physics are discussed. For each scheme the order of approximation is calculated, stability conditions are obtained and convergence is proved. Common scheme generation technique is investigated, and some common derivation methods of stability conditions are discussed too.

| Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины, форма промежуточной аттестации по дисциплине | Всего (часы)              | В том числе   |                             |   |       |                             |                              |  |   |   |
|---|---------------------------|---|-----------------------------|---|-------|-----------------------------|------------------------------|--|---|---|
|   |                           | Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы |                             |   |       |                             |                              | Самостоятельная работа учащегося, часы |   |   |
|   |                           | из них  |                             |   |       |                             |                              | из них                                 |   |   |
| Занятия лекционного типа  | Занятия семинарского типа | Групповые консультации  | Индивидуальные консультации | Учебные занятия, направленные на проведение текущего контроля успеваемости: коллоквиумы, практические контрольные занятия и др. | Всего | Выполнение домашних заданий | Подготовка рефератов и т.п.. | Всего                                  |   |   |
| Тема 1. Математическое моделирование: основные этапы, понятия. Примеры.                                   | 2                         | 2   | 0                           | -   | -     | 0                           | 2                            | 0                                      | - | 0 |

|   |           |          |          |          |          |          |          |          |          |          |
|---|-----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| <b>Тема 2. Основные понятия теории разностных схем.</b>   | <b>4</b>  | <b>2</b> | <b>0</b> | <b>-</b> | <b>-</b> | <b>0</b> | <b>2</b> | <b>2</b> | <b>-</b> | <b>2</b> |
| <b>Тема 3. Аппроксимация дифференциальных операторов: локальная аппроксимация, аппроксимация на сетке. Порядок аппроксимации в точке и на сетке. Порядок аппроксимации сеточного уравнения.</b> | <b>10</b> | <b>4</b> | <b>4</b> | <b>-</b> | <b>-</b> | <b>0</b> | <b>8</b> | <b>2</b> | <b>-</b> | <b>2</b> |
| <b>Тема 4. Аппроксимация начальных данных и граничных условий (на примерах классических задач математической физики).</b>   | <b>10</b> | <b>4</b> | <b>4</b> | <b>-</b> | <b>-</b> | <b>0</b> | <b>8</b> | <b>2</b> | <b>-</b> | <b>2</b> |
| <b>Тема 5. Интегро-интерполяционный метод построения разностных схем.</b>   | <b>4</b>  | <b>2</b> | <b>0</b> | <b>-</b> | <b>-</b> | <b>0</b> | <b>2</b> | <b>2</b> | <b>-</b> | <b>2</b> |
| <b>Тема 6. Устойчивость и сходимость разностных схем. Априорные оценки решения. Порядок точности.</b>   | <b>4</b>  | <b>2</b> | <b>0</b> | <b>-</b> | <b>-</b> | <b>0</b> | <b>2</b> | <b>2</b> | <b>-</b> | <b>2</b> |

|  |            |          |          |          |          |          |           |           |          |           |  |
|--|------------|----------|----------|----------|----------|----------|-----------|-----------|----------|-----------|--|
| <b>Тема 7. Аппарат теории разностных схем: формулы разностного дифференцирования произведения функций, формула суммирования по частям, первая и вторая разностные формулы Грина.</b> | <b>4</b>   | <b>2</b> | <b>0</b> | <b>-</b> | <b>-</b> | <b>0</b> | <b>2</b>  | <b>2</b>  | <b>-</b> | <b>2</b>  |  |
| <b>Тема 8. Разностные аналоги теорем вложения.</b>   | <b>4</b>   | <b>2</b> | <b>0</b> | <b>-</b> | <b>-</b> | <b>0</b> | <b>2</b>  | <b>2</b>  | <b>-</b> | <b>2</b>  |  |
| <b>Тема 9. Метод энергетических неравенств исследования устойчивости (на примере краевых задач для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка).</b>                   | <b>12</b>  | <b>6</b> | <b>4</b> | <b>-</b> | <b>-</b> | <b>0</b> | <b>10</b> | <b>2</b>  | <b>-</b> | <b>2</b>  |  |
| <b>Тема 10. Метод энергетических неравенств для нестационарных задач.</b>  | <b>12</b>  | <b>6</b> | <b>4</b> | <b>-</b> | <b>-</b> | <b>0</b> | <b>10</b> | <b>2</b>  | <b>-</b> | <b>2</b>  |  |
| <b>Промежуточная аттестация – экзамен</b>  | <b>42</b>  | <b>-</b> | <b>-</b> | <b>2</b> | <b>-</b> | <b>4</b> | <b>6</b>  | <b>36</b> | <b>-</b> | <b>36</b> |  |
| <b>Итого</b>   | <b>108</b> |          |          |          |          |          | <b>54</b> |           |          | <b>54</b> |  |

## 10. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ УЧАЩИХСЯ

Самостоятельная работа учащихся состоит в изучении лекционного материала, учебно-методической литературы, подготовки к практическим заданиям текущего контроля.

## 11. РЕСУРСНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

Основная учебно-методическая литература

- 1) Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989. – 616 с.
- 2) Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. – 735 с.
- 3) Самарский А.А., Гулин А.В. Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973. – 416 с.
- 4) Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы математической физики. М.: Научный мир, 2003. – 316 с.

Лицензионное программное обеспечение, в том числе отечественного производства

При реализации дисциплины может быть использовано следующее программное обеспечение:

1. Программный продукт Red Hat Enterprise Linux Server for HPC Compute Node for Power, LE, Self-support 4 шт. №5540331
2. Программный продукт Red Hat Enterprise Linux Server for HPC Head Node for Power, LE, Standard 1 шт. №5540332
3. Операционная система SUSE Linux Enterprise Server 11 SP4 for x86\_64 16 шт.
4. Операционная система Red Hat Enterprise Linux Server 5.0 for x86\_64 14шт.
5. Операционная система SUSE Linux Enterprise Server 10 SP3 for ppc64 7 шт.
6. Операционная система Ubuntu 18.04.
7. Программное обеспечение для виртуализации Oracle VM VirtualBox
8. Операционная система ALTLinuxMATEStarterkit 9 лицензияGPL
9. Программный продукт JetBrains IntelliJ IDEA Community Edition Free Educational Licenses
10. Программный продукт JetBrains PyCharm Community Edition Free Educational Licenses
11. Программный продукт JetBrains CLion Community Edition Free Educational Licenses
12. Программный продукт UPPAAL (<http://www.uppaal.org/>) академическая лицензия
13. Программный продукт Java 8 (64-bit) Oracle Corporation
14. Программный продукт Java SE Development Kit 8(64-bit) Oracle Corporation

15. Программный продукт NetBeans IDE 8.2 NetBeans.org
16. Программный продукт Dev-C++ Bloodshed Software
17. Программный продукт CodeBlocks The Code::Blocks Team
18. Программный продукт Free Pascal 3.0.0 Free Pascal Team
19. Программный продукт Python 3.5.1 (64-bit) Python Software Foundation
20. Программный продукт R for Windows 3.2.2 R Core Team
21. Программный продукт Haskell Platform 7.10.3 Haskell.org
22. Операционная система Microsoft Windows 7 корпоративная академическая лицензия
23. Операционная система Microsoft Windows 10 Education академическая лицензия
24. Программный продукт Microsoft Project Professional 2013 академическая лицензия
25. Программный продукт Microsoft Visio Professional 2013 академическая лицензия
26. Программный продукт Microsoft Visual Studio Professional 2013 - RUS [Русский (Россия)] академическая лицензия

Профессиональные базы данных и информационные справочные системы

1. <http://www.edu.ru> – портал Министерства образования и науки РФ
2. <http://www.ict.edu.ru> – система федеральных образовательных порталов «ИКТ в образовании»
3. <http://www.openet.ru> - Российский портал открытого образования
4. <http://www.mon.gov.ru> - Министерство образования и науки Российской Федерации
5. <http://www.fasi.gov.ru> - Федеральное агентство по науке и инновациям

Ресурсы информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»

<https://ru.wikipedia.org/>

Информационные технологии, используемые в процессе обучения

В процессе обучения используется пакет прикладных программ Maple.

Материально-техническая база

Для преподавания дисциплины требуется лекционная аудитория, оборудованная компьютером, лазерным проектором, экраном, а также маркерной или меловой доской.

## **12. ЯЗЫК ПРЕПОДАВАНИЯ**

Русский

## **13. РАЗРАБОТЧИК ПРОГРАММЫ, ПРЕПОДАВАТЕЛИ**

к.ф.- м.н., ассистент Мокин А.Ю. ([mknandrew@cs.msu.ru](mailto:mknandrew@cs.msu.ru))

Оценочные средства для промежуточной аттестации по дисциплине

«Теория разностных схем»

Промежуточная аттестация заключается в индивидуальном собеседовании (устный экзамен).

Средства для оценивания планируемых результатов обучения, критерии и показатели оценивания приведены ниже.

| РЕЗУЛЬТАТ ОБУЧЕНИЯ  | КРИТЕРИИ и ПОКАЗАТЕЛИ ОЦЕНИВАНИЯ РЕЗУЛЬТАТА ОБУЧЕНИЯ из соответствующих карт компетенций |  |   |   |  | ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА |
|---|--|--|---|---|--|--------------------|
|   | 1  | 2  | 3   | 4   | 5  |                    |
|   | Неудовлетворительно  | Неудовлетворительно  | Удовлетворительно   | Хорошо  | Отлично  |                    |
| 31 (СПК-33)<br>Знать:<br>основные понятия и утверждения теории разностных схем, способы аппроксимации дифференциальных операторов, встречающихся в задачах математической физики. | Отсутствие знаний  | Фрагментарные представления об основных понятиях и утверждениях теории разностных схем, способах аппроксимации дифференциальных операторов, встречающихся в задачах математической физики. | В целом сформированные, но неполные знания об основных понятиях и утверждениях теории разностных схем, способах аппроксимации дифференциальных операторов, встречающихся в задачах математической физики. | Сформированные, но содержащие отдельные пробелы знания об основных понятиях и утверждениях теории разностных схем, способах аппроксимации дифференциальных операторов, встречающихся в задачах математической физики. | Сформированные систематические знания об основных понятиях и утверждениях теории разностных схем, способах аппроксимации дифференциальных операторов, встречающихся в задачах математической физики. | устный экзамен     |

|  |                    |   |   |   |  |                |
|--|--------------------|---|---|---|--|----------------|
| У1 (СПК-33)<br>Уметь аппроксимировать стандартные задачи математической физики, получать условия устойчивости и сходимости разностных схем, аппроксимирующих стандартные задачи. | Отсутствие умений  | Фрагментарные умения по аппроксимации задач математической физики, а также по доказательству условий устойчивости разностных схем.          | В целом сформированное, но не систематическое умение аппроксимировать задачи математической физики, доказывать условия устойчивости разностных схем.                        | Сформированное, но содержащее отдельные пробелы умение аппроксимировать задачи математической физики, доказывать условия устойчивости разностных схем.                        | Сформированное систематическое умение аппроксимировать задачи математической физики, доказывать условия устойчивости разностных схем.                        | устный экзамен |
| В1 (СПК-33)<br>Владеть навыками построения разностных схем, основными методами доказательства априорных оценок для решения разностных схем.                                      | Отсутствие навыков | Фрагментарное владение навыками построения разностных схем, основными методами доказательства априорных оценок для решения разностных схем. | В целом сформированное, но не систематическое владение навыками построения разностных схем, основными методами доказательства априорных оценок для решения разностных схем. | Сформированное, но содержащее отдельные пробелы владение навыками построения разностных схем, основными методами доказательства априорных оценок для решения разностных схем. | Сформированное систематическое владение навыками построения разностных схем, основными методами доказательства априорных оценок для решения разностных схем. | устный экзамен |

### Фонды оценочных средств

#### Примерные практические контрольные задания для текущего контроля успеваемости.

ПКЗ ТК1. Аппроксимация дифференциальных операторов.

Примерные варианты заданий:

1. Аппроксимировать дифференциальный оператор первой производной в точке  $X_0$  на шаблоне, состоящем из точек  $X_0, X_0-h, X_0-2h, h>0$ .
2. Аппроксимировать дифференциальный оператор первой производной в точке  $X_0$  на шаблоне, состоящем из точек  $X_0, X_0+h, X_0+2h, h>0$ .
3. Аппроксимировать дифференциальный оператор второй производной в точке  $X_0$  на шаблоне, состоящем из точек  $X_0, X_0-h, X_0-2h, X_0-3h, h>0$ .
4. Аппроксимировать дифференциальный оператор третьей производной в точке  $X_0$  на шаблоне, состоящем из точек  $X_0+h, X_0, X_0-h, X_0-2h, X_0-3h, h>0$ .

ПКЗ ТК2. Вычисление сумм с помощью формулы суммирования по частям.

Вычислить следующие суммы:

1.  $1 + 4 + 9 + \dots + n^2 + \dots$
2.  $1 + 8 + 27 + \dots + n^3 + \dots$
3.  $2 + 8 + 24 + \dots + n(2^n) + \dots$
4.  $\sin(1) + 2\sin(2) + 3\sin(3) + \dots + n \cdot \sin(n) + \dots$

#### **Список вопросов для устного экзамена на промежуточной аттестации.**

1. Основные этапы математического моделирования (на примере стационарной задачи теплопроводности).
2. Интегро-интерполяционный метод построения разностных схем (на примере стационарной задачи теплопроводности).
3. Основные понятия теории разностных схем: сетка, пространство сеточных функций, оператор проекции, разностная схема, сеточные нормы, согласованность норм, сходимость разностной схемы.
4. Локальная аппроксимация дифференциальных операторов (оператор первой производной, второй производной, четвертой производной).
5. Повышение порядка аппроксимации дифференциальных операторов (на примере оператора второй производной, оператора нестационарного уравнения теплопроводности).
6. Аппроксимация дифференциальных операторов на сетке. Порядок аппроксимации оператора второй разностной производной на неравномерной сетке.
7. Погрешность аппроксимации дифференциальных операторов на решении уравнения. Повышение порядка аппроксимации при помощи уравнения.
8. Аппроксимация дифференциального уравнения теплопроводности, дифференциального уравнения колебания струны. Погрешность аппроксимации сеточных уравнений.

9. Аппроксимация краевых условий задач математической физики (на примере краевого условия третьего типа для стационарной и нестационарной задачи теплопроводности).
10. Аппроксимация начальных данных задач математической физики. Трехслойная разностная схема для задачи теплопроводности. Разностная схема для задачи колебания струны.
11. Аппроксимация, устойчивость и сходимость разностных схем. Основная теорема сходимости.
12. Формулы разностного дифференцирования суммы и произведения функций. Формула суммирования по частям на равномерной и неравномерной сетках.
13. Первая и вторая разностные формулы Грина на равномерной и неравномерной сетках. Самосопряженность и положительная определенность разностного оператора второй производной.
14. Сеточная норма Фридрихса. Разностные аналоги теоремы вложения на равномерной и неравномерной сетках. Оценка сверху для сеточной нормы Фридрихса.
15. Сеточная норма Соболева. Разностные аналоги теорем вложения на равномерной и неравномерной сетках.
16. Метод энергетических неравенств для разностной стационарной задачи теплопроводности с граничными условиями первого рода. Устойчивость и сходимость разностной схемы на равномерных сетках.
17. Метод энергетических неравенств для разностной стационарной задачи теплопроводности с однородными граничными условиями третьего рода.
18. Априорные оценки решения разностной стационарной задачи теплопроводности с неоднородными граничными условиями третьего рода. Устойчивость и сходимость разностной схемы на равномерных сетках.
19. Негативная норма для стационарной задачи теплопроводности. Сходимость разностной схемы с граничными условиями смешанного типа на неравномерных сетках.
20. Сходимость разностной схемы для стационарной задачи теплопроводности с граничными условиями третьего типа на неравномерных сетках.
21. Метод энергетических неравенств для разностной нестационарной задачи теплопроводности. Устойчивость и сходимость разностной схемы.
22. Метод энергетических неравенств для разностной нестационарной задачи колебания струны. Устойчивость и сходимость разностной схемы.

### **Методические материалы для проведения процедур оценивания результатов обучения**

Выполнение домашних заданий для текущего контроля успеваемости и экзаменационного задания промежуточного контроля оценивается по пятибалльной системе. Итоговая оценка вычисляется как среднее арифметическое полученных результатов.