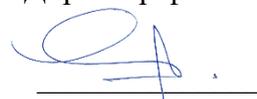


Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
Филиал Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова
в городе Сарове

УТВЕРЖДАЮ

Директор филиала МГУ в городе
Сарове

 /В.В. Воеводин/

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Наименование дисциплины (модуля):

«Вариационные - проекционные методы в математической физике»

Уровень высшего образования:

Подготовка магистров (неинтегрированная магистратура)

Направление подготовки (специальность):

«Прикладная математика и информатика» (01.04.02) (3++)

Направленность (профиль) ОПОП:

«Вычислительные методы и методика моделирования»

Форма обучения:

Очная

Саров 2021

Рабочая программа дисциплины (модуля) разработана в соответствии с самостоятельно установленным МГУ образовательным стандартом (ОС МГУ) для реализуемых основных профессиональных образовательных программ высшего образования по направлению подготовки 01.04.02 "Прикладная математика и информатика" программы магистратуры в редакции приказа МГУ от 30 декабря 2020 г. №1366.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

1. НАИМЕНОВАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Вариационные - проекционные методы в математической физике

2. УРОВЕНЬ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

Подготовка научно-педагогических кадров в магистратуре.

3. НАПРАВЛЕНИЕ ПОДГОТОВКИ, НАПРАВЛЕННОСТЬ (ПРОФИЛЬ) ПОДГОТОВКИ

Направление 01.04.02 «Прикладная математика и информатика». Направленность (профиль) «Математические и компьютерные методы решения задач естествознания». Образовательная программа «Вычислительные методы и методика моделирования»

4. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОСНОВНОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

Дисциплина входит в обязательную часть магистерской образовательной программ «Вычислительные методы и методика моделирования», изучается в 1-м семестре.

5. ПЕРЕЧЕНЬ ПЛАНИРУЕМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ

Дисциплина участвует в формировании следующих компетенций образовательной программы:

Формируемые компетенции	Планируемые результаты обучения
ОПК-1. Способен формулировать и решать актуальные задачи в области фундаментальной и прикладной математики	З1 Знать: Основные вариационные и проекционные методы решения задач математической физики. У1 Уметь правильно ставить задачи математической физики, требующие решения, и анализировать качества конечномерных моделей. В1 Владеть теорией и навыками построения вариационных и проекционных методов.

Оценочные средства для промежуточной аттестации приведены в Приложении.

6. ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ

Объем дисциплины составляет 3 зачетные единицы, всего 108 часов.

54 часа составляет контактная работа с преподавателем – 54 часов занятий лекционного типа, 0 часов занятий семинарского типа, 0 часов индивидуальных консультаций, 0 часа групповых консультаций, 0 часов мероприятий текущего контроля успеваемости.

54 часов составляет самостоятельная работа учащегося.

7. ВХОДНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Учащиеся должны владеть знаниями по математическому анализу, линейной алгебре, дифференциальным уравнениям, функциональному анализу, численным методам.

8. ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Основными видами аудиторной учебной работы являются лекции и консультации, реализуемые с широким использованием средств интерактивной видеотрансляции. Самостоятельная работа студентов предполагает подготовку теоретического материала и письменное выполнение заданий. В рамках самостоятельной работы использование магистрами научной литературы, сети Интернет и иных информационных технологий для поиска и анализа дополнительных сведений по содержанию дисциплины.

9. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Курс включает материал, являющийся основой построения приближенных математических методов решения краевых задач математической физики. В курсе рассмотрены обобщенные решения краевых задач, сведение краевых задач к задачам поиска экстремума интегральных функционалов и основные прямые методы минимизации. В курсе излагаются основные схемы проекционных методов и обоснование проекционных методов для некоторых классов операторных уравнений.

The course includes material that is the basis for constructing approximate mathematical methods for solving boundary value problems of mathematical physics. In the course, generalized solutions of boundary value problems, reduction of boundary value problems to problems of searching for an extremum of integral functionals, and basic direct methods of minimization are considered. The course outlines the main schemes of projection methods and the justification of projection methods for certain classes of operator equations.

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины, форма промежуточной аттестации по дисциплине	Всего (часы)	В том числе								
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы					Самостоятельная работа учащегося, часы			
		из них					из них			
Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Групповые консультации	Индивидуальные консультации	Учебные занятия, направленные на проведение текущего контроля успеваемости: коллоквиумы, практические контрольные занятия и др.	Всего	Выполнение домашних заданий	Подготовка рефератов и т.п..	Всего		
<p>Тема1. Функционалы в метрических пространствах. Основные свойства функционалов, как отображений в метрических пространствах. Непрерывность, полунепрерывность, ограниченность. Выпуклые множества и выпуклые функционалы. Постановка задач минимизации функционалов. Корректность задачи минимизации по А.Н.Тихонову. Гладкость функционалов. Определение производной по</p>	24	12	-	-	-	12	12	-	12	

<p>Фреше и Гато. Теоремы о достижимости точной нижней грани ограниченного функционала. Примеры решения задач минимизации в Банаховых и Гильбертовых пространствах.</p>										
<p>Тема 2. Постановка краевых задач для линейных дифференциальных уравнений. Обобщенные решения двухточечной краевой задачи для обыкновенного уравнения второго порядка. Сведение краевой задачи к исследованию симметричного замкнутого оператора в Гильбертовом пространстве. Расширение симметричного оператора. Теорема о существовании обобщенного решения. Методы построения приближенных решений как решение последовательности экстремальных задач в конечномерных пространствах. Построение конечномерных подпространств. Методы ко-</p>	<p>24</p>	<p>12</p>	<p>-</p>	<p>-</p>	<p>-</p>	<p>-</p>	<p>12</p>	<p>12</p>	<p>-</p>	<p>12</p>

<p>нечных элементов. Полнота и базисность конечномерных подпространств. Слайны как метод построения конечномерных подпространств. Метод Ритца, Метод Галеркина и другие проекционные методы приближенного построения обобщенных решений.</p>										
<p>Тема 3. Задача о минимуме функционала Дирихле и обобщенное решение задачи Дирихле. Функционал Дирихле и его физическая трактовка. Совокупность функций, для которых существует интеграл Дирихле. Неравенства Пуанкаре и Фридрихса для интеграла Дирихле. Интеграл Дирихле для гармонических функций. Вариационный принцип Дирихле. Пример Адамара для решения задачи Дирихле. Понятие о следах функции на границе области. Теоремы о следах. Введение про-</p>	<p>28</p>	<p>14</p>	<p>-</p>	<p>-</p>	<p>-</p>	<p>-</p>	<p>14</p>	<p>14</p>	<p>-</p>	<p>14</p>

странства $H^{1/2}$. Применение вариационного метода для решения задачи Дирихле.											
Тема 4. Вариационные методы решения задач на собственные значения. Основные сведения о задачах на собственные значения для дифференциальных уравнений. Собственные числа и собственные функции симметричного оператора. Энергетические теоремы. В проблеме собственных чисел. Минимаксный принцип. Процесс Ритца в проблеме собственных значений. Двухсторонние оценки собственных чисел. Применение к эллиптическим уравнениям.	32	16	-	-	-	-	16	16	-	16	
Промежуточная аттестация - индивидуальное собеседование	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
Итого	108						54	54			

10. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ УЧАЩИХСЯ

Самостоятельная работа учащихся состоит в изучении лекционного материала, учебно-методической литературы, подготовки к практическим заданиям текущего контроля и промежуточной аттестации.

11. РЕСУРСНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

Основная учебно-методическая литература

- 1) Треногин В.А., Писаревский Б.М., Соболева Т.С. Функциональный анализ. М.: Изд. Центр «Академия», 2013.-240 с.
- 2) Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1988.- 552 с.
- 3) Михлин С.Г. Вариационные методы в математической физике. М.:Наука, 1970.- 512 с.
- 4) Тиман А.Ф., Трофимов В.Н. Введение в теорию гармонических функций. М.: Наука, 1968.- 482 с.
- 5) Гулд С. Вариационные методы в задачах о собственных значениях. М.: Мир, 1970.- 328 с.
- 6) Смирнов Ю.Г. Математические методы исследования задач электродинамики. Пенза: Изд.-во Пензенского государственного университета, 2009.- 268 с.

Дополнительная учебно-методическая литература

- 1) Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.-512.
- 2) Шубин М.А. Лекции об уравнениях математической физики. М.: МЦНМО, 2003.-303 с.
- 3) Карчевский М.М., Павлова М.Ф. Уравнения математической физики. Дополнительные главы. СПб.: «Лань», 2016.- 276 с.
- 4) Дезин А.А. Общие вопросы теории граничных задач. М.: Наука, 1980.-208 с.
- 5) Соболев С.А. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.- 336 с.

Ресурсы информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»

Информационные технологии, используемые в процессе обучения

МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ БАЗА

Для преподавания дисциплины требуется класс, оборудованный интерактивной или меловой доской и средствами интерактивной видеотрансляции.

12. ЯЗЫК ПРЕПОДАВАНИЯ

Русский

13. РАЗРАБОТЧИК ПРОГРАММЫ, ПРЕПОДАВАТЕЛЬ

д.ф.-м.н, профессор Анатолий Серафимович Ильинский

Приложение

Оценочные средства для промежуточной аттестации по дисциплине «Вариационные и проекционные методы в математической физике»

Промежуточная аттестация состоит из индивидуального собеседования, проверяющего приобретенные знания.

Средства для оценивания планируемых результатов обучения, критерии и показатели оценивания приведены ниже.

РЕЗУЛЬТАТ ОБУЧЕНИЯ	КРИТЕРИИ и ПОКАЗАТЕЛИ ОЦЕНИВАНИЯ РЕЗУЛЬТАТА ОБУЧЕНИЯ из соответствующих карт компетенций					ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА
	1	2	3	4	5	
	Неудовлетворительно	Неудовлетворительно	Удовлетворительно	Хорошо	Отлично	
Знать: основные подходы к построению работоспособных схем вариационных и проекционных методов в математической физике	Отсутствие знаний	Фрагментарные представления об основных подходах к построению работоспособных схем вариационных и проекционных методов.	В целом сформированные, но неполные знания об основных подходах к построению работоспособных схем вариационных и проекционных методов.	Сформированные, но содержащие отдельные пробелы знания об основных подходах к построению работоспособных схем вариационных и проекционных методов.	Сформированные систематические знания об основных подходах к построению работоспособных схем вариационных и проекционных методов.	индивидуальное собеседование
Уметь правильно ставить задачи, требующие решения, и анализировать потребительские качества	Отсутствие умений	Фрагментарные умения правильно ставить задачи, требующие решения, и анализировать потребительские качества конечномерных моделей	В целом сформированное, но не систематическое умение правильно ставить задачи, требующие решения, и анализировать потребительские качества конечномер-	Сформированное, но содержащее отдельные пробелы умение правильно ставить задачи, требующие решения, и анализировать потребительские качества конеч-	Сформированное систематическое умение правильно ставить задачи, требующие решения, и анализировать потребительские качества конечномер-	индивидуальное собеседование

конечномерных моделей			ных моделей	номерных моделей	ных моделей	
Владеть теорией и практикой построения вариационных и проекционных методов.	Отсутствие навыков	Фрагментарное владение теорией и практикой построения вариационных и проекционных методов	В целом сформированное, но не систематическое владение теорией и практикой построения вариационных и проекционных методов.	Сформированное, но содержащее отдельные пробелы владение теорией и практикой построения вариационных и проекционных методов.	Сформированное систематическое владение теорией и практикой построения вариационных и проекционных методов.	индивидуальное собеседование

Фонды оценочных средств

Примерные практические контрольные задания для текущего контроля успеваемости.

Список вопросов для индивидуального собеседования на промежуточной аттестации.

Список вопросов для индивидуального собеседования на этапе аттестации.

1. Задача минимизации функционала в гильбертовом пространстве. Полунепрерывные снизу функционалы в гильбертовом пространстве.
2. Корректность экстремальных задач в гильбертовом пространстве. Минимизирующие последовательности.
3. Корректность задачи о наилучшем приближении в гильбертовом пространстве. Ортогональное разложение.
4. Необходимые условия для точек минимума функционалов. Производные по Фреше и Гато. Выпуклые функционалы.
5. Постановка краевых задач для эллиптических уравнений второго порядка. Классическое решение. Теоремы единственности.
6. Краевая задача для уравнений Штурма-Лиувилля. Определение оператора краевой задачи. Понятие о расширении оператора. Классическое и обобщенное решения.
7. Краевая задача Дирихле для уравнения Лапласа. Классическое решение. Теоремы существования и единственности.
8. Энергетический метод для положительно определённых операторов в гильбертовом пространстве. Теорема о функционале энергии.
9. Исследование задачи о минимуме функционала энергии. Пространства H^1 и \dot{H}^1 .
10. Теорема о сходимости минимизирующей последовательности для функционала энергии.
11. Процесс Ритца построения минимизирующей последовательности энергетического функционала.
12. Теорема о сходимости метода Ритца.
13. Построение обобщенного решения краевой задачи Дирихле для уравнения Штурма-Лиувилля. Доказательство положительной определённости оператора краевой задачи.

14. Основные свойства обобщенного решения задачи Дирихле. Принадлежность решения задачи Дирихле пространству $H^1([a,b])$. Обобщённые производные.
15. Третья краевая задача для уравнения Штурма-Лиувилля. Положительная определённость оператора задачи. Построение минимизирующей последовательности. Естественные краевые условия.
16. Построение обобщенного решения для уравнения Пуассона с условиями Дирихле. Неравенство Фридрихса.
17. Третья краевая задача для уравнения Пуассона. Неравенство Фридрихса-Стеклова.
18. Задача Неймана для уравнения Пуассона. Неравенство Пуанкаре.
19. Постановка задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Понятие следа функции на границе. Обобщённое решение.
20. Пространство сплайнов для решения краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. Определение степенных сплайнов.
21. Степенные сплайны дефекта $\nu = 1$. Основные теоремы аппроксимации сплайнами первой степени дефекта $\nu = 1$.
22. Степенные эрмитовы сплайны третьей степени дефекта $\nu = 2$. Теоремы аппроксимации.
23. Применение сплайн-аппроксимации в методе Рунге для получения приближённых решений.
24. Сплайны первой степени в треугольной области. Триангуляция плоской области. Построение схем метода Рунге задачи Дирихле для уравнений Пуассона.
25. Билинейные сплайны в плоской области и их применение к построению приближенного решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа.
26. Вариационные методы в линейной алгебре. Задача на собственные значения симметрического оператора в конечномерном евклидовом пространстве.
27. Минимаксное определение собственных значений в конечномерном евклидовом пространстве.
28. Задача на собственные значения для симметрического полуограниченного дифференциального оператора. Основные свойства собственных значений и собственных функций.
29. Теорема о спектре положительно определённого симметрического оператора в гильбертовом пространстве.
30. Метод Рунге-Рунге построения приближённых решений спектральных задач.
31. Теорема о сходимости метода Рунге-Рунге.
32. Применение метода Рунге-Рунге к спектральной задаче Штурма-Лиувилля.
33. Метод Рунге-Рунге для задачи на собственные значения для оператора Лапласа в плоской области.

Методические материалы для проведения процедур оценивания результатов обучения

Выполнение домашних заданий для текущего контроля успеваемости и экзаменационного задания промежуточного контроля оценивается по пятибалльной системе. Итоговая оценка вычисляется как среднее арифметическое полученных результатов.