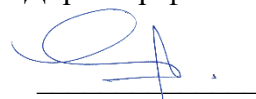


Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова  
Филиал Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова  
в городе Сарове

УТВЕРЖДАЮ

Директор филиала МГУ в городе  
Сарове

 /В.В. Воеводин/

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)**

**Наименование дисциплины (модуля):**

---

**«Метод конечных элементов»**

**Уровень высшего образования:**

***Подготовка магистров (неинтегрированная магистратура)***

---

**Направление подготовки (специальность):**

**«Прикладная математика и информатика» (01.04.02)**

---

**Направленность (профиль) ОПОП:**

**«Вычислительные методы и методика моделирования»**

---

**Форма обучения:**

**Очная**

---

Саров 2021

Рабочая программа дисциплины (модуля) разработана в соответствии с самостоятельно установленным МГУ образовательным стандартом (ОС МГУ) для реализуемых основных профессиональных образовательных программ высшего образования по направлению подготовки 01.04.02 "Прикладная математика и информатика" программы магистратуры в редакции приказа МГУ от 30 декабря 2020 г. №1366.

## РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

### 1. НАИМЕНОВАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Метод конечных элементов

### 2. УРОВЕНЬ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

Подготовка научно-педагогических кадров в магистратуре.

### 3. НАПРАВЛЕНИЕ ПОДГОТОВКИ, НАПРАВЛЕННОСТЬ (ПРОФИЛЬ) ПОДГОТОВКИ

Направление 01.04.02 «Прикладная математика и информатика». Направленность (профиль) «Математические и компьютерные методы решения задач естествознания». Образовательная программа «**Вычислительные методы и методика моделирования**»

### 4. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОСНОВНОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

Дисциплина входит в обязательную часть магистерской образовательной программы «**Вычислительные методы и методика моделирования**», изучается во 2-м семестре.

### 5. ПЕРЕЧЕНЬ ПЛАНИРУЕМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ

Дисциплина участвует в формировании следующих компетенций образовательной программы:

Формируемые компетенции	Планируемые результаты обучения
Использовать современные численные и аналитические методы для решения задач математической физики, алгебры, интегральных и дифференциальных уравнений, в том числе для решения многомерных задач механики и электродинамики сплошных сред, теплопереноса, конвекции-диффузии и в других, практически интересных, областях (МКП-2).	З1 Знать: Основные подходы к построению работоспособных схем метода конечных элементов У1 Уметь Правильно ставить задачи, требующие решения, и анализировать потребительские качества конечномерных моделей В1 Владеть Теорией и практикой построения методов конечных элементов

<p>Разрабатывать численные методы решения дифференциальных уравнений с частными производными и интегральных уравнений, вариационные и оптимизационные численные алгоритмы с заданными свойствами (МКП-3).</p>	<p>З1 Знать: Особенности построения конечно-элементных методов для основных классов задач математической физики У1 Уметь Строить конечно-элементные алгоритмы для типичных классов задач В1 Владеть Математическим аппаратом построения конечно-элементных алгоритмов на практике</p>
---	---

Оценочные средства для промежуточной аттестации приведены в Приложении.

## 6. ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ

Объем дисциплины составляет 4 зачетные единицы, всего 144 часа.

64 часа составляет контактная работа с преподавателем – 60 часов занятий лекционного типа, 0 часов занятий семинарского типа, 0 часов индивидуальных консультаций, 4 часа групповых консультаций, 0 часов мероприятий текущего контроля успеваемости.

80 часов составляет самостоятельная работа учащегося.

## 7. ВХОДНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Учащиеся должны владеть знаниями по математическому анализу, линейной алгебре, дифференциальным уравнениям, функциональному анализу, численным методам.

## 8. ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

В процессе обучения используется электронная версия учебного пособия В.Б. Андреева «Лекции по методу конечных элементов».

## 9. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

В курсе дается изложение основных концепций метода конечных элементов (МКЭ). Здесь МКЭ трактуется как специальная «кусочная» реализация метода Галеркина; более широкие трактовки этого метода привлекаются лишь для анализа квадратурных схем и при изучении изопараметрической техники. Все основные понятия сначала излагаются на примере смешанной краевой задачи для обыкновенного линейного дифференциального уравнения второго порядка. Рассматриваются как технологические вопросы реализации метода, так и математическое обоснование его сходимости.

The course provides an account of the basic concepts of the finite element method (FEM). Here the FEM is treated as a special "piecewise" implementation of the Galerkin method; more extensive interpretations of this method are used only for the analysis of quadrature schemes and in the study of isoparametric techniques. All the basic concepts are first clarified on the example of a mixed boundary-value problem for an ordinary second-order linear differential equation. Both technological issues of method realization and mathematical justification of its convergence are considered.

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины, форма промежуточной аттестации по дисциплине	Всего (часы)	В том числе								
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы					Самостоятельная работа учащегося, часы			
		из них					из них			
Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Групповые консультации	Индивидуальные консультации	Учебные занятия, направленные на проведение текущего контроля успеваемости: коллоквиумы, практические контрольные занятия и др.	Всего	Выполнение домашних заданий	Подготовка рефератов и т.п..	Всего		
<b>Тема 1. От классического решения к обобщенному</b>  Двухточечная краевая задача. Классическое решение. Условия разрешимости и единственности. Обобщенные функции и обобщенные производные.	10	6	-	-	-	-	6	4	-	4

<p>Решение почти всюду. Случай разрывных коэффициентов. Задача о минимуме квадратичного функционала и вариационная задача.</p> <p>Обобщенное решение. Главные и естественные граничные условия. Условия на разрыве.</p>										
<p><b>Тема 2. Методы Рунге, Галеркина и конечных элементов.</b></p> <p>Методы Рунге и Галеркина. Пространство конечных элементов. Конечноэлементная аппроксимация на линейных элементах.</p> <p>Неоднородные граничные условия первого рода. Пространство кусочно-квадратичных элементов. Матрицы жесткости и массы. Вектор нагрузки.</p> <p>Кусочно-квадратичные и кубические эрмитовы</p>	<p><b>16</b></p>	<p>8</p>	<p>-</p>	<p>-</p>	<p>-</p>	<p>-</p>	<p><b>8</b></p>	<p>8</p>	<p>-</p>	<p><b>8</b></p>

<p>элементы. Задача об изгибе балки.</p> <p>Метод конечных элементов для систем уравнений</p>										
<p><b>Тема 3. Технология МКЭ.</b></p> <p>Задача о растяжении стержня. Матрица функций формы элемента. Вектор нагрузки. Матрица жесткости элемента. Матрица кинематических связей.</p> <p>Сборка. Глобальные матрица жесткости и вектор нагрузки. Снятие «флажков». Связь с методом конечных разностей.</p>	<b>6</b>	4	-	-	-	-	<b>4</b>	2	-	<b>2</b>
<p><b>Тема 4. Уравнение Пуассона в многоугольнике.</b></p> <p>Триангуляция многоугольника. Треугольные конечные элементы. Баррицентрические координаты.</p>	<b>14</b>	8	-	-	-	-	<b>8</b>	6	-	<b>6</b>

<p>Матрица жесткости и вектор нагрузки треугольного линейного конечного элемента. Инвариантность матрицы жесткости по отношению к расположению элемента на плоскости. Сборка. Связь с разностными схемами.</p> <p>Квадратичные и кубические конечные элементы. Матрица жесткости треугольного квадратичного элемента. Прямоугольные конечные элементы. Матрица жесткости билинейного элемента.</p>										
<p><b>Тема 5. Элементы теории интерполяции в пространствах Соболева.</b></p> <p>Оценка лагранжевой интерполяции в пространствах непрерывных и непрерывно дифференцируемых функций. Оценки линейной интерполяции в <math>L_2</math> и <math>H^1</math> на</p>	<b>10</b>	6	-	-	-	-	<b>6</b>	4	-	<b>4</b>



<p>отрезке.</p> <p>Оценка погрешности интерполяции многочленами <math>k</math>-ой степени в <math>H^s</math>. Эквивалентная нормировка пространства <math>H^s(0,1)</math>.</p> <p>Вторая эквивалентная нормировка <math>H^s(0,1)</math> и <math>H^s(\Omega)</math>. Аппроксимационные свойства конечноэлементного пространства <math>S^h_{\{3,1\}}</math>.</p>										
<p><b>Тема 6. Сходимость МКЭ.</b></p> <p>Априорные оценки решения в <math>H^s(0,1)</math>. Оценка скорости сходимости МКЭ в энергетической норме. Сходимость в <math>L_2</math>.</p> <p>Негативные пространства <math>H^{-s}</math> и их нормировка. Сходимость МКЭ в <math>H^{-s}</math>. Суперсходимость МКЭ в узлах. Равномерная сходимость.</p>	<p><b>10</b></p>	<p>6</p>	<p>-</p>	<p>-</p>	<p>-</p>	<p>-</p>	<p><b>6</b></p>	<p>4</p>	<p>-</p>	<p><b>4</b></p>

<p>Оценка интерполяции на треугольном элементе. Условие регулярности триангуляции. Сходимость МКЭ в случае однородной задачи Дирихле для уравнения Пуассона в выпуклом многоугольнике.</p>										
<p><b>Тема 7. Схемы с численным интегрированием.</b></p> <p>Постановка задачи. Условие <math>H^1</math> эллиптичности возмущенной квадратичной формы. Простейшая оценка точности при возмущении билинейной формы.</p> <p>Первая лемма Стренга. Лемма Брэмбла-Гилберта. Использование квадратурной формулы для аппроксимации билинейной и линейной форм. Оценка точности квадратурной формулы на элементе. Достаточные условия для <math>H^1</math>-эллиптичности квад-</p>	<b>14</b>	8	-	-	-	-	<b>8</b>	6	-	<b>6</b>

<p>ратурной квадратичной формы.</p> <p>Оценка точности МКЭ с численным интегрированием в энергетической норме. Оценки точности в слабых нормах. Примеры квадратурных формул и квадратурных схем. Сравнение с методом конечных разностей.</p>										
<p><b>Тема 8. Двумерные задачи в областях с криволинейной границей.</b></p> <p>Простейшая аппроксимация криволинейной границы и ее влияние на точность конечноэлементного решения. Квадратичные треугольные элементы в криволинейной области.</p> <p>Изопараметрические конечные элементы. Треугольные элементы с одной криволинейной стороной. Кусочно-квадратичная аппрокси-</p>	<p><b>10</b></p>	<p>6</p>	<p>-</p>	<p>-</p>	<p>-</p>	<p>-</p>	<p><b>6</b></p>	<p>4</p>	<p>-</p>	<p><b>4</b></p>

<p>магия границы при квадратичных конечных элементах. невырожденность якобиана при квадратичном преобразовании.</p> <p>Изопараметрические четырехугольные элементы. Условие невырожденности билинейного преобразования.</p> <p>Неоднородная задача Дирихле в многоугольнике.</p>										
<p><b>Тема 9. Дальнейшие обобщения.</b></p> <p>Задачи с негладкими решениями. Задачи в невыпуклых многоугольниках. Априорное сгущение сетки к окрестности входящих углов. Аддитивное выделение особенностей. Условия согласования.</p> <p>Полудискретный МКЭ для нестационарных уравнений. Матрица массы. Использование мето-</p>	<b>14</b>	8	-	-	-	-	<b>8</b>	6	-	<b>6</b>

<p>дов Рунге-Кутты для полной дискретизации задачи.</p> <p>Смешанные вариационные формулировки и их дискретизация. Сходимость приближенного решения. Трудности при отыскании решения полученной алгебраической задачи.</p> <p>Особенности применения МКЭ к задачам с преобладающей конвекцией (сингулярно возмущенные задачи). Понятие о разрывном методе Галеркина.</p>											
<b>Промежуточная аттестация – индивидуальное собеседование</b>	<b>40</b>	-	-	4	-	-	<b>4</b>	36	-	<b>36</b>	
<b>Итого</b>	<b>144</b>						<b>64</b>				<b>80</b>

## 10. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ УЧАЩИХСЯ

Самостоятельная работа учащихся состоит в изучении лекционного материала, учебно-методической литературы, подготовки к практическим заданиям текущего контроля и промежуточной аттестации.

## **11. РЕСУРСНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ**

Основная учебно-методическая литература

- 1) Андреев В.Б. Лекции по методу конечных элементов. Учебное пособие. М.: МАКС Пресс, 2010.–264 с.
- 2) Даутов Р.З., Карчевский М.М. Введение в теорию метода конечных элементов. Казань: КГУ, 2011.–238 с.
- 3) Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. М.: Мир. 1980.–512 с.

Дополнительная учебно-методическая литература

- 1) Василевский Ю.В., Данилов А.А., Линников К.Н., Чугунов В.Н. Автоматизированные технологии построения неструктурированных расчетных сеток. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2016.
- 2) Даутов Р.З. Программирование МКЭ в MATLAB. — Казань: Изд-во КФУ, 2010. — 71 с.
- 3) Brenner S.C., Scott L.R. Mathematical Theory of Finite Element Methods. New York: Springer Science+Business Media, 2008.–397 p.
- 4) Johnson C. Numerical solutions of partial differential equations by the finite element method/ Cambridge-New York: Cambridge University Press, 1987.–278 p.

Ресурсы информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»

- 1) <https://courseforge.net/projects/ani2d/>

Информационные технологии, используемые в процессе обучения

## **МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ БАЗА**

Для преподавания дисциплины требуется класс, оборудованный интерактивной или меловой доской и средствами интерактивной видеотрансляции.

## **12. ЯЗЫК ПРЕПОДАВАНИЯ**

Русский

## **13. РАЗРАБОТЧИК ПРОГРАММЫ, ПРЕПОДАВАТЕЛЬ**

д.ф.- м.н., профессор Андреев Владимир Борисович

**Оценочные средства для промежуточной аттестации по дисциплине «Метод конечных элементов»**

Промежуточная аттестация состоит из индивидуального собеседования, проверяющего приобретенные знания.

Средства для оценивания планируемых результатов обучения, критерии и показатели оценивания приведены ниже.

РЕЗУЛЬТАТ ОБУЧЕНИЯ	КРИТЕРИИ и ПОКАЗАТЕЛИ ОЦЕНИВАНИЯ РЕЗУЛЬТАТА ОБУЧЕНИЯ из соответствующих карт компетенций					ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА
	1	2	3	4	5	
	<b>Неудовлетворительно</b>	<b>Неудовлетворительно</b>	<b>Удовлетворительно</b>	<b>Хорошо</b>	<b>Отлично</b>	
Знать: основные подходы к построению работоспособных схем метода конечных элементов	Отсутствие знаний	Фрагментарные представления об основных подходах к построению работоспособных схем метода конечных элементов	В целом сформированные, но неполные знания об основных подходах к построению работоспособных схем метода конечных элементов	Сформированные, но содержащие отдельные пробелы знания об основных подходах к построению работоспособных схем метода конечных элементов	Сформированные систематические знания об основных подходах к построению работоспособных схем метода конечных элементов	индивидуальное собеседование
Уметь правильно ставить задачи, требующие решения, и анализировать потребительские качества конечномерных моделей	Отсутствие умений	Фрагментарные умения правильно ставить задачи, требующие решения, и анализировать потребительские качества конечномерных моделей	В целом сформированное, но не систематическое умение правильно ставить задачи, требующие решения, и анализировать потребительские качества конечномерных моделей	Сформированное, но содержащее отдельные пробелы умение правильно ставить задачи, требующие решения, и анализировать потребительские качества конечномерных моделей	Сформированное систематическое умение правильно ставить задачи, требующие решения, и анализировать потребительские качества конечномерных моделей	индивидуальное собеседование
Владеть теорией и	Отсутствие навыков	Фрагментарное владение теорией и прак-	В целом сформированное, но не систе-	Сформированное, но содержащее отдель-	Сформированное систематическое	индивидуальное собеседование

практикой построения методов конечных элементов		тикой построения методов конечных элементов	матическое владение теорией и практикой построения методов конечных элементов	ные пробелы владение теорией и практикой построения методов конечных элементов	владение теорией и практикой построения методов конечных элементов	вание
---	--	---	---	--	--	-------

### Фонды оценочных средств

#### Примерные практические контрольные задания для текущего контроля успеваемости.

#### Список вопросов для индивидуального собеседования на промежуточной аттестации.

- 1) Задача минимизации квадратичного функционала. Вариационное уравнение. Обобщенное решение.
- 2) Главные и естественные граничные условия. Условие на разрыве коэффициентов для обобщенного решения.
- 3) Методы Ритца и Галеркина. Система Ритца-Галеркина и ее разрешимость.
- 4) МКЭ для ОДУ второго порядка на линейных элементах.
- 5) МКЭ - инженерный подход.
- 6) Матрица жесткости и вектор нагрузки элемента. Глобальные матрица жесткости и вектор нагрузки. Матрица кинематических связей.
- 7) Технология сборки. Матрица индексов. Учет граничных условий (снятие "флажков").
- 8) Матрица жесткости и матрица массы квадратичного элемента. Вектор нагрузки.
- 9) Эрмитов кубичный элемент. МКЭ для задачи об изгибе бруса.
- 10) МКЭ для системы уравнений.
- 11) Бариецентрические координаты и их свойства. Интегрирование по треугольнику бариецентрического одночлена.
- 12) Матрица жесткости и вектор нагрузки треугольного линейного элемента.
- 13) Инвариантность матрицы жесткости.
- 14) Пример сборки в двумерном случае.
- 15) Треугольные элементы высокого порядка.
- 16) Прямоугольные элементы.
- 17) Основные свойства приближенного решения. Лемма Сеа.



- 18) Оценка квадратичной формы и сопутствующие оценки.
- 19) Оценка интерполяции функций из  $H^2(0,1)$  в  $L_2(0,1)$  и в  $H^1(0,1)$ .
- 20) Оценка точности интерполяции функций из  $H^s(0,1)$ .
- 21) Эквивалентная нормировка  $H^s(0,1)$ .
- 22) Вторая эквивалентная нормировка  $H^s(0,1)$ .
- 23) Оценка скорости сходимости МКЭ в  $H^1(0,1)$  и в  $L_2(0,1)$ .
- 24) Негативные нормы. Сходимость МКЭ в  $H^{-s}$ .
- 25) Суперсходимость МКЭ в узлах.
- 26) Регулярная триангуляция. Сходимость МКЭ на треугольниках.
- 27) Лемма Стренга. Обратные неравенства.
- 28) Оценка точности квадратурной формулы, используемой для вычисления элементов матрицы жесткости.
- 29) Лемма о невырожденности квадратичной формы, полученной с использованием квадратур.
- 30) Теорема о сходимости квадратурного МКЭ.
- 31) Изопараметрические квадратичные конечные элементы.
- 32) Вычисление матрицы жесткости изопараметрического элемента на реперном треугольнике.
- 33) Изопараметрические четырехугольные элементы.

### **Примерное практическое контрольное задание для промежуточной аттестации.**

ПКЗ ПА. Найти конечноэлементное из  $\tilde{S}^h$  решение следующей задачи:

$$-u''=x, \quad 0 < x < 1, \quad u(0)=0, \quad u'(1)=0,$$

где  $\tilde{S}^h$  есть пространство кусочно-линейных, линейных на  $[0, 1/2]$  и на  $[1/2, 1]$  непрерывных функций, обращающихся в нуль при  $x=0$ .

### **Методические материалы для проведения процедур оценивания результатов обучения**

Выполнение домашних заданий для текущего контроля успеваемости и экзаменационного задания промежуточного контроля оценивается по пятибалльной системе. Итоговая оценка вычисляется как среднее арифметическое полученных результатов.