Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
Филиал Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова
в городе Сарове

УТВЕРЖДАЮ

Директор филиала МГУ в городе Сарове

______________/В.В. Воеводин/

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Наименование дисциплины (модуля):

«Численные методы в интегральных уравнениях и их приложения»

Уровень высшего образования:
Подготовка магистров (неинтегрированная магистратура)

Направление подготовки (специальность):

«Прикладная математика и информатика» (01.04.02) (3++)

Направленность (профиль) ОПОП:

««Вычислительные методы и методика моделирования»

Форма обучения:

Очная

Саров 2021

Рабочая программа дисциплины (модуля) разработана в соответствии с самостоятельно установленным МГУ образовательным стандартом (ОС МГУ) для реализуемых основных профессиональных образовательных программ высшего образования по направлению подготовки 01.04.02 "Прикладная математика и информатика" программы магистратуры в редакции приказа МГУ от 30 декабря 2020 г. №1366.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

1. НАИМЕНОВАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Численные методы в интегральных уравнениях и их приложения

2. УРОВЕНЬ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

Подготовка научно-педагогических кадров в магистратуре.

3. НАПРАВЛЕНИЕ ПОДГОТОВКИ, НАПРАВЛЕННОСТЬ (ПРОФИЛЬ) ПОДГОТОВКИ

Направление 01.04.02 «Прикладная математика и информатика». Направленность (профиль) «Математические и компьютерные методы решения задач естествознания», Образовательная программа «Вычислительные методы и методика моделирования».

4. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОСНОВНОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

Дисциплина входит в обязательную часть магистерских образовательных программ «Вычислительные методы и методика моделирования», изучается в 4 семестре.

5. ПЕРЕЧЕНЬ ПЛАНИРУЕМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ

Дисциплина участвует в формировании следующих компетенций образовательной программы:

Формируемые компетенции	Планируемые результаты обучения
Использовать современные численные и аналитические методы для ре шения задач математической физики, алгебры, интегральных и диффе ренциальных уравнений, в том числе для решения многомерных задач механики и электродинамики сплошных сред, тепломассопереноса, конвекции-диффузии и в других, практически интересных, областях (МКП-2). Разрабатывать численные методы решения дифференциальных уравне ний с частными производными и интегральных уравнений, вариацион ные и оптимизационные численные алгоритмы с заданными свойствам (МКП-3)	З1 Знать: Основные методы решения интегральных уравнений различных типов и их приложения к задачам математической физики У1 Уметь Осуществлять сведение краевых задач математической физики к интегральным уравнениям, определять тип возникающих уравнений и осуществлять построение численных алгоритмов решения этих уравнений В1 Владеть Навыками построения численных алгоритмов решения для основных типов линейных интегральных уравнений

Оценочные средства для промежуточной аттестации приведены в Приложении.

6. ОБЪЕМ ДИСЦИПЛИНЫ

Объем дисциплины составляет 4 зачетные единицы, всего 144 часов.

72 часа составляет контактная работа с преподавателем – 68 часов занятий лекционного типа, 0 часов занятий семинарского типа (семинары, научно-практические занятия, лабораторные работы и т.п.), 0 часов индивидуальных консультаций, 0 часа групповых консультаций, 0 часов мероприятий текущего контроля успеваемости, 4 часа промежуточной аттестации.

72 часа составляет самостоятельная работа учащегося.

7. ВХОДНЫЕ ТРЕБОВАНИЯ ДЛЯ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Учащиеся должны владеть знаниями по математическому анализу, линейной алгебре, функциональному анализу, дифференциальным уравнениям и краевым задачам, численным методам в объеме, соответствующем основным образовательным программам бакалавриата по укрупненным группам направлений и специальностей 01.00.00 «Математика и механика», 02.00.00 «Компьютерные и информационные науки».

8. ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Технология концентрированного обучения, Технология критериально - ориентированного обучения (полного усвоения)

9. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

В курсе излагаются численные методы решения интегральных уравнений различных типов и приложения этих методов к решению краевых задач. Особенностью курса, во-первых, является то, что в нем рассматриваются как классические интегральные уравнения Фредгольма с обычными интегралами, так и уравнения с сингулярными интегралами. Во-вторых, существенный акцент сделан на численные методы, применимые как для одномерных интегральных уравнений, так и для уравнений с кратными, криволинейными, поверхностными интегралами, в том числе для областей интегрирования сложной формы. Излагаются методы численного решения основных краевых задач математической физики, основанные на сведении их к интегральным уравнениям.

Numerical methods for solving integral equations of various types and applications of these methods to solving boundary value problems are presented. A feature of the course, firstly, is that it considers both classical Fredholm integral equations with ordinary integrals and equations with singular integrals. Secondly, significant emphasis is placed on numerical methods applicable both for one-dimensional integral equations and for equations with multiple, curvilinear, surface integrals, including for complex-shaped integration domains. Methods for the numerical solution of the main boundary value problems of mathematical physics, based on their reduction to integral equations, are presented.

Наименование и краткое содержание разделов и тем дисциплины, форма промежуточной аттестации по дисциплине	**Всего (часы)**	В том числе								
		Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем), часы из них						**Самостоятельная работа учащегося, часы** из них		
		Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа	Групповые консультации	Индивидуальные консультации	Учебные занятия, направленные на проведение текущего контроля успеваемости: коллоквиумы, практические контрольные занятия и др.	**Всего**	Выполнение домашних заданий	Подготовка рефератов и т.п..	**Всего**
Тема 1. Интегралы и интегральные операторы. Виды интегралов: определенный интеграл, кратные интегралы, криволинейные и поверхностные интегралы. Несобственные интегралы с особенностью в точке Интегральный оператор Фредгольма с непрерывным и полярным ядром.	**32**	16	-	-	-	-	**16**	16	-	**16**

Его ограниченность и компактность.										
Тема 2. Элементы теории приближений. Общие свойства линейных операторов и линейных уравнений в банаховых пространствах. Обратимость оператора $I-K$, где I - тождественный оператор, K - оператор с малой нормой. Ряд Неймана. Метод последовательных приближений. Теорема об обратимости возмущенного оператора вида $I-K-\Delta K$. Проектирование уравнения $(I-K)\varphi=f$ на подпространство (теория Л.В. Канторовича). Разрешимость приближенного уравнения	**16**	8		-	-	-	**8**	8	-	**8**
Тема 3. Численные методы решения интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода. Интегральные уравнения	**32**	16		-	-	-	**16**	16	-	**16**

Фредгольма 1-го и 2-го рода. Численный метод коллокации. Метод коллокации с кусочно-постоянной аппроксимацией неизвестной функции Метод Галеркина. Конечно-элементый вариант метода Галеркина Метод вырожденных ядер для численного решения уравнения Фредгольма 2-го рода. Итерационное решение уравнения Фредгольма 2-го рода с оператором малой нормы. Уравнения Вольтера. Численное решение уравнения Фредгольма 2-го рода в случае неоднозначной разрешимости однородного уравнения. Метод регуляризирующих переменных.										
Тема 4. Численное решение сингулярных интегральных уравнений	**20**	10	-	-	-	-	**10**	10	-	**10**

Сингулярный интеграл в смысле главного значения. Свойства сингулярных интегралов и интегральных операторов с сингулярными интегралами. Численное решение одномерных сингулярных интегральных уравнений методом квадратурных формул интерполяционного типа. Численное решение одномерных сингулярных интегральных уравнений с применением квадратурной формулы прямоугольников.										
Тема 5. Приложения интегральных уравнений к решению краевых задач. Краевые задачи для уравнений Лапласа, Пуассона, Гельмгольца. Некоторые сведения из теории потенциала.	**40**	18		2		-	**18**	22	-	**22**

Сведение краевых задач для уравнений Лапласа и Гельмгольца к граничным интегральным уравнениям Фредгольма второго рода и численная схема решения задач. Решение плоских краевых задач на разрезе с условиями Неймана и Дирихле. Решение трехмерных краевых задач для уравнений Лапласа и Гельмгольца на экране с условиями Неймана и Дирихле.										
Промежуточная аттестация – экзамен	**4**	4	-	-	-	-	**4**	-	-	**-**
Итого	**144**						**72**			**72**

10. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ УЧАЩИХСЯ

Самостоятельная работа учащихся состоит в изучении лекционного материала, учебно-методической литературы, подготовки к промежуточной аттестации.

11. РЕСУРСНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

Основная учебно-методическая литература

1. Сетуха А.В. Численные методы в интегральных уравнениях и их приложения. Учеб. пособие. - М.:АРГАМАК-МЕДИА, 2014. – 256 с.

Дополнительная литература

1. Тыртышников Е.Е. Методы численного анализа: учеб. пособ. – М.: Акдемия, 2007. – 320 с.
1. Тихонов А.Н. Самарский А.А. Уравнения математической физики. Учебное пособие. – М.: МГУ, 1999. – 798с.
2. Лифанов И.К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. – М.: ТОО «Янус», 1995. – 520 с.
3. Партон В.З. Перлин П.И. Интегральные уравнения теории упругости. – М.Наука. 1977. 312 с.
4. Мусхелишвили Н.И. Сигнгулярные интегральные уравнения – М: Наука 1968. 512с.
5. Колтон Д., Кресс Р. Методы интегральных уравнений в теории рассеяния. М.: Мир, 1987. –311с.
6. Мажиров А.В. Полянин А.Д. Справочник по интегральным уравнениям. – М.: «Факториал-пресс», 2000, - 384 с.

Ресурсы информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»

https://elibrary.ru

https://www.scopus.com

http://apps.webofknowledge.com

Информационные технологии, используемые в процессе обучения

Использование электронных образовательных ресурсов, электронных библиотек.

МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКАЯ БАЗА

Для преподавания дисциплины требуется класс, оборудованный интерактивной или меловой доской и средствами интерактивной видеотрансляции.

12. ЯЗЫК ПРЕПОДАВАНИЯ

Русский

13. РАЗРАБОТЧИК ПРОГРАММЫ, ПРЕПОДАВАТЕЛЬ

д.ф.м.н., профессор Сетуха Алексей Викторович. (setuhaav@rambler.ru)

Приложение

Оценочные средства для промежуточной аттестации по дисциплине

«Численные методы в интегральных уравнениях и их приложения»

Промежуточная аттестация экзамена, в ходе которого дается задание, проверяющее приобретенные учащимся умения и навыки, и проводится индивидуальное собеседование, проверяющее приобретенные знания.

Средства для оценивания планируемых результатов обучения, критерии и показатели оценивания приведены ниже.

РЕЗУЛЬТАТ ОБУЧЕНИЯ	**КРИТЕРИИ и ПОКАЗАТЕЛИ ОЦЕНИВАНИЯ РЕЗУЛЬТАТА ОБУЧЕНИЯ из соответствующих карт компетенций**					**ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА**
	1	2	3	4	5	
	Неудовлетворительно	**Неудовлетворительно**	**Удовлетворительно**	**Хорошо**	**Отлично**	
З1 (МПК-2) Знать: Основные методы решения интегральных уравнений различных типов и их приложения к задачам математической физики	Отсутствие знаний	Фрагментарные представления об основных методах решения интегральных уравнений различных типов и их приложения к задачам математической физики	В целом сформированные, но неполные знания об основных методах решения интегральных уравнений различных типов и их приложения к задачам математической физики	Сформированные, но содержащие отдельные пробелы знания об основных методах решения интегральных уравнений различных типов и их приложения к задачам математической физики	Сформированные систематические знания об основных методах решения интегральных уравнений различных типов и их приложения к задачам математической физики	индивидуальное собеседование
У1 (МПК-2) Уметь Осуществлять сведение краевых задач математической	Отсутствие умений	Фрагментарные умения в области анализа интегральных уравнений и построения метода их решения	В целом сформированное, но не систематическое умение в области анализа интегральных уравнений и построения метода их	Сформированное, но содержащее отдельные пробелы умение в области анализа интегральных уравнений и построения	Сформированное систематическое умение в области анализа интегральных уравнений и построения метода	Задание из экзаменационного билета

физики к интегральным уравнениям, определять тип возникающих уравнений и осуществлять построение численных алгоритмов решения этих уравнений			решения	метода их решения	их решения	
В1 (МПК-3) Владеть Навыками построения численных алгоритмов решения для основных типов линейных интегральных уравнений	Отсутствие навыков	Фрагментарное владение навыками построения численных алгоритмов решения для основных типов линейных интегральных уравнений	В целом сформированное, но не систематическое владение навыками построения численных алгоритмов решения для основных типов линейных интегральных уравнений	Сформированное, но содержащее отдельные пробелы владение навыками построения численных алгоритмов решения для основных типов линейных интегральных уравнений	Сформированное систематическое владение навыками построения численных алгоритмов решения для основных типов линейных интегральных уравнений	Задание из экзаменационного билета

Фонды оценочных средств

Список вопросов для индивидуального собеседования на промежуточной аттестации.

1. Виды интегралов: определенный интеграл, кратные интегралы, несобственные интегралы с особенностью в точке.
2. Криволинейные интегралы. Несобственные криволинейные интегралы с особенностью в точке.
3. Поверхностные интегралы. Параметризация поверхности. Нормаль к поверхности. Элемент площади поверхности. Специальная система координат.
4. Несобственные поверхностные интегралы с особенностью в точке.
5. Интегральный оператор Фредгольма с непрерывным ядром и его ограниченность.
6. Интегральный оператор Фредгольма с непрерывным ядром и его компактность.

7. Интегральный оператор Фредгольма с полярным ядром. Его ограниченность и компактность.

8. Пространство функций, непрерывных по Гельдеру. Выполнение условия Гельдера для образа функции при действии интегрального оператора Фредгольма.

9. Общие свойства линейных операторов и линейных уравнений в банаховых пространствах. Обратимость оператора $I - K$, где I - тождественный оператор, K - оператор с малой нормой. Ряд Неймана.

10. Метод последовательных приближений. Теорема об обратимости возмущенного оператора вида $I - K - \Delta K$.

11. Проектирование уравнения $(I - K)\varphi = f$ на подпространство (теория Канторовича). Разрешимость приближенного уравнения.

12. Интегральные уравнения Фредгольма 1-го и 2-го рода. Теоремы Фредгольма (без доказательства).

13. Разбиение области интегрирования. Пространство кусочно-постоянных функций. Разрешимость интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода в пространстве кусочно-постоянных функций.

14. Приближенное решение уравнения Фредгольма 2-го рода методом квадратур с кусочно-постоянными аппроксимациями. Ограниченность обратной матрицы системы линейных уравнений.

15. Оценка для погрешности решения уравнения Фредгольма 2-го рода с гладким ядром методом кусочно-постоянных аппроксимаций и коллокаций при произвольном выборе точек коллокации. Повышение точности приближенного решения при выборе точек коллокации в центрах тяжести ячеек разбиения.

16. Оценка для погрешности решения уравнения Фредгольма 2-го рода с полярным ядром методом кусочно-постоянных аппроксимаций.

17. Численная схема с приближенным вычислением коэффициентов квадратурной формулы.

18. Евклидовы и гильбертовы пространства. Ортогональные дополнения. Ортогональная проекция: определение, существование и единственность, способ нахождения. Полная система подпространств.

19. Метод Бубнова-Галеркина. Общая схема.

20. Разрешимость дискретных уравнений для численной схемы метода Бубнова-Галеркина. Сходимость метода Бубнова-Галеркина в гильбертовом пространстве.

21. Кончно-элементный вариант метода Бубнова Галеркина.

22. Метод вырожденных ядер для численного решения уравнения Фредгольма 2-го рода.

23. Итерационное решение уравнения Фредгольма 2-го рода с оператором малой нормы. Уравнения Вольтера.

24. Численное решение уравнения Фредгольма 2-го рода в случае неоднозначной разрешимости однородного уравнения. Метод регуляризирующих переменных.

25. Понятие сингулярного интеграла с ядром Коши на отрезке. Существование интеграла для плотности, удовлетворяющей условию Гельдера.

26. Интеграл с ядром Гильберта и его связь с интегралом Коши.

27. Сингулярный интеграл как обобщенная функция. Гиперсингулярный интеграл, понимаемый в смысле конечного значения по Адамару.

28. Кратные и поверхностные сингулярные и гиперсингулярные интегралы.

29. Сингулярный интеграл с ядром Коши как непрерывный оператор в пространстве H^{α} (Выполнение условия Гельдера для значений сингулярного интеграла).

30. Сингулярный интеграл с ядром Гильберта как непрерывный оператор в пространстве $H^{\alpha}(R/2\pi)$

31. О приближении сингулярного интеграла обычным путем сглаживания особенности.

32. Дифференцирование сингулярного интеграла с ядром Коши и Гильберта.

33. Квадратурные формулы типа метода прямоугольников для сингулярного интеграла с ядром Коши на отрезке. Сингулярный интеграл с плотностью равной 1 (Квадратурные формулы типа прямоугольников. Оценки для погрешности.)

34. Сингулярный интеграл с плотностью $\varphi(t) \in H^{\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$. (Квадратурные формулы типа прямоугольников. Оценки для погрешности.)

35. Квадратурные формулы типа метода прямоугольников для гиперсингулярного интеграла на отрезке с плотностью $\varphi(t) \in H^{1,\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$. (Квадратурные формулы типа прямоугольников. Оценки для погрешности.)

36. Численное решение гиперсингулярного интегрального уравнения на отрезке методом вихревых пар (квадратурные формулы типа прямоугольников).

37. Численное решение сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши на отрезке в случаях разных индексов методов дискретных вихрей (квадратурные формулы типа прямоугольников).

38. Общая идея построения квадратурных формул интерполяционного типа.

39. Спектральные соотношения для интеграла с ядром Гильберта.

40. Спектральные соотношения для интеграла с ядром Коши.

41. Квадратурные формулы интерполяционного типа для интеграла с ядром Гильберта.

42. Численное решение интегрального уравнения с ядром Гильберта на основе квадратур интерполяционного типа.

43. Уравнения Лапласа и Пуассона, Гельмгольца. Потенциалы точечного заряда, простого и двойного слоя в двух и трехмерном случаях. Краевые значения потенциалов простого двойного слоя и нормальной производной потенциала простого слоя.

44 . Сведение краевых задач для уравнений Лапласа и Гельмгольца к граничным интегральным уравнениям Фредгольма второго рода и численная схема решения задач:

45. Решение плоских краевых задач на разрезе с условиями Неймана и Дирихле.

46. Решение трехмерных краевых задач для уравнений Лапласа и Гельмгольца на экране с условиями Неймана и Дирихле.

Примерное задание из экзаменационного билета **для промежуточной аттестации.**

ПКЗ ПА. Решение внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в трехмерном случае методом граничных интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода.

Сформулировать краевую задачу, выписать интегральное представление для решения задачи. Свести задачу к граничному интегральному уравнению. Предложить численную схему решения граничного интегрального уравнения и расписать ее.

Методические материалы для проведения процедур оценивания результатов обучения

Итоговая оценка промежуточной аттестации складывается из наличия теоретических знаний, практических навыков и умений. На основе анализа результатов обучения «Знать», «Уметь», «Владеть» выставляется оценка по каждой из указанных категорий в соответствии с критериями и показателями результата оценивания результата обучения, приведенными в таблице выше. Итоговую оценку рекомендуется ставить как среднюю из оценок по трем категориям результатов обучения при пересчете на 5-бальный эквивалент («неудовлетворительно» - 2, «удовлетворительно» - 3, «хорошо» - 4, «отлично» - 5). При этом, если по одной из категорий оценка «неудовлетворительно», то может быть выставлена общая оценка «удовлетворительно» (не выше) при наличии положительных оценок по другим категориям. Если по двум категориям оценка «неудовлетворительно», общая оценка «неудовлетворительно».