


Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова
Филиал Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова
в городе Сарове

УТВЕРЖДАЮ
Директор филиала МГУ в
городе Сарове


/В.В. Воеводин/

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Наименование дисциплины:

«Оптимизация и численные методы»

Уровень высшего образования:

магистратура

Направление подготовки / специальность:

02.04.02 "Фундаментальная информатика и информационные технологии" (3++)

Направленность (профиль)/специализация ОПОП:

Суперкомпьютерные технологии и фундаментальная информатика

Форма обучения:

очная

Саров 2022

Рабочая программа дисциплины (модуля) разработана в соответствии с самостоятельно установленным МГУ образовательным стандартом (ОС МГУ) для реализуемых основных профессиональных образовательных программ высшего образования по направлению подготовки 02.04.02 "Фундаментальная информатика и информационные технологии" программы магистратуры в редакции приказа МГУ от 30 декабря 2020 г. №1366.

1. Место дисциплины (модуля) в структуре ОПОП ВО:

дисциплина относится к базовой части ОПОП ВО (Модуль «Математическое моделирование сложных систем и процессов»), изучается в третьем семестре.

2. Входные требования для освоения дисциплины (модуля), предварительные условия (если есть):
отсутствуют

3. Результаты обучения по дисциплине (модулю):

Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю)	
Способен создавать и анализировать математические модели профессиональных задач, учитывать ограничения и границы применимости моделей, интерпретировать полученные математические результаты. (ОПК-3)	Знать основной набор теоретических положений и понятий: теоремы существования оптимальных решений, условия оптимальности, дифференцируемость, выпуклость, компактность, а также конструкции базовых итерационных методов Уметь применять полученные знания в гильбертовых пространствах для качественного исследования различных оптимизационных задач и их аналитического или численного решения Владеть навыками исследования корректности имеющейся математической постановки оптимизационной задачи и навыками выбора подходящего устойчивого вычислительного метода её решения

4. Объем дисциплины (модуля) составляет 3 з.е., в том числе 36 академических часов, отведенных на контактную работу обучающихся с преподавателем, 72 академических часов на самостоятельную работу обучающихся.

5. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий:

5.1. Структура дисциплины (модуля) по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий (в строгом соответствии с учебным планом)

Наименование разделов и тем дисциплины (модуля), Форма промежуточной аттестации по дисциплине (модулю)	Номинальные трудозатраты обучающегося		Самостоятельная работа обучающегося, академические часы	Всего академических часов	Форма текущего контроля успеваемости* (наименование)
	Контактная работа (работа во взаимодействии с преподавателем) Виды контактной работы, академические часы				
	Занятия лекционного типа	Занятия семинарского типа			
Тема 1 Классическая теорема Вейерштрасса и её обобщения для сильно и слабо полунепрерывных снизу функций в гильбертовом пространстве.	8		16	24	опрос
Тема 2 Выпуклые и сильно выпуклые функции.	8		16	24	опрос
Тема 3 Итерационные методы градиентного типа	10		20	30	опрос
Тема 4 Метод Ньютона	10		20	30	опрос
Другие виды самостоятельной работы (отсутствуют)	—	—			—
Промежуточная аттестация (экзамен)					
Итого	36		72	108	—

5.2. Содержание разделов (тем) дисциплины

№ п/п	Наименование разделов (тем) дисциплины	Содержание разделов (тем) дисциплин
1.	Тема 1 Классическая	Классическая теорема Вейерштрасса и её обобщения для сильно и слабо полунепрерывных снизу функций в гильбертовом пространстве. Компактность и слабая компактность.

	теорема Вейерштрасса и её обобщения для сильно и слабо полунепрерывных снизу функций в гильбертовом пространстве.	Слабая полунепрерывность снизу квадратичного функционала. Элементы дифференциального исчисления в гильбертовых пространствах. Первая и вторая производные квадратичного функционала. Производная сложной функции. Формулы конечных приращений. Линейные задачи оптимального управления с квадратичными критериями качества.
2.	Тема 2 Выпуклые и сильно выпуклые функции.	Теорема о локальном минимуме выпуклых функций. Условие оптимальности для дифференцируемого функционала в форме вариационного неравенства. Критерии выпуклости и сильной выпуклости для функций, имеющих первые и вторые производные. Теорема Вейерштрасса для сильно выпуклых функций. Условия сильной выпуклости квадратичного функционала. Проекция точки на множество, условия её существования и единственности. Нестрогая сжимаемость оператора проектирования. Проекционная форма критерия оптимальности.
3.	Тема 3 Итерационные методы градиентного типа	Итерационные методы градиентного типа: скорейшего спуска, проекции градиента, условного градиента. Условия их сходимости и оценки скорости сходимости для сильно выпуклых функций в гильбертовом пространстве. Метод сопряженных градиентов в конечномерном пространстве для квадратичных сильно выпуклых функций. Применение метода к функционалам общего вида в гильбертовых пространствах.
4.	Тема 4 Метод Ньютона	Метод Ньютона. Условия сходимости и оценка скорости сходимости для сильно выпуклых функций в гильбертовом пространстве. Общая и каноническая задача линейного программирования. Критерий угловой точки для канонической задачи. Симплекс-метод для канонической задачи линейного программирования. Метод искусственного базиса для отыскания стартовой угловой точки.

6. Фонд оценочных средств (ФОС, оценочные и методические материалы) для оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю).

6.1. Типовые контрольные задания или иные материалы для проведения текущего контроля успеваемости, критерии и шкалы оценивания (в отсутствие утвержденных соответствующих локальных нормативных актов на факультете)

Образцы письменных контрольных заданий для текущего контроля успеваемости на этапах промежуточной аттестации.

Тема 1 (3 задания).

1. Рассматриваются задачи минимизации функции двух переменных

$$J(x, y) \rightarrow \inf, \quad (x, y) \in U,$$

на трёх допустимых множествах: 1) $U = U_1 = R^2$, 2) $U = U_2 = \{y \geq 0\}$, 3) $U = U_3 = \{x \leq 0, y \leq 0\}$. Решите эти задачи, т.е. в каждой из них найдите нижние грани J_{i*} и множества $U_{i*}, i = 1, 2, 3$, оптимальных решений.

2. В гильбертовом пространстве l^2 задана функция

$$J(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{1}{n}} x_n^2.$$

Определите, является ли она 1) выпуклой, 2) непрерывной, 3) полунепрерывной снизу, 4) слабо непрерывной, 5) слабо полунепрерывной снизу.

3. Изобразите на координатной плоскости четыре множества:

$$A = \{x > 0, y > 0, xy \geq 1\}, \quad B = \{0 < x < 1, x(1-x)y > 1\}, \quad A \cup B, \quad A \cap B.$$

Определите, обладает ли каждое из них свойствами 1) выпуклости, 2) замкнутости, 3) ограниченности.

Критерии оценок

Количество выполненных заданий	1	2	3
Оценка	3.0	4.0	5.0

Тема 2. (3 задания)

1. В пространстве R^2 переменных (x, y) найдите первую и вторую производные функции

$$f(x, y) = (x + y)^2 + \frac{1}{x}.$$

2. Используя найденные производные, исследуйте функцию $f(x, y)$ на выпуклость и сильную выпуклость на множестве $x > 0, y > 0$.

3. В гильбертовом пространстве $L^2(-T, T)$ найдите первую производную $J'(u) \in L^2(-T, T)$ функционала

$$J(\mathbf{u}) = \left(\int_0^T \left(\int_{-t}^t \mathbf{u}(s) ds \right)^2 dt \right)^2.$$

Критерии оценок

Количество выполненных заданий	1	2	3
Оценка	3.0	4.0	5.0

Тема 3. (2 задания)

1. В пространстве R^2 переменных (x, y) поставлена следующая задача минимизации с ограничениями:

$$f(x, y) = 2x^2 + (x - y)^2 \rightarrow \inf, \quad 1 \leq x \leq 3, \quad -2 \leq y \leq 2.$$

Эта задача решается **методом условного градиента**. Процесс начинается в точке $u_0 = (3, 0)$. Найдите следующие приближения. Остановите итерационный процесс при первом попадании во множество оптимальных решений.

2. В бесконечномерном гильбертовом пространстве H поставлена следующая задача минимизации с ограничениями:

$$J(\mathbf{u}) = \|\mathbf{u} - \langle \mathbf{a}, \mathbf{u} \rangle \mathbf{a}\|^2 \rightarrow \inf, \quad \langle \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{u} \rangle \geq 1, \quad \langle \mathbf{b}, \mathbf{u} \rangle \geq 1,$$

где $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in H$, $\|\mathbf{a}\| = \|\mathbf{b}\| = 1$, $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 0$. Эта задача решается **методом проекции градиента** с постоянным шагом $\alpha = 1/2$. Процесс начинается в точке $u_0 = -\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$. Найдите следующие приближения. Остановите итерационный процесс при первом попадании во множество оптимальных решений.

Критерии оценок

Количество выполненных заданий	1	2
Оценка	4.0	5.0

Тема 4. (2 задания)

1. С помощью **симплекс-метода** решите каноническую задачу линейного программирования в пространстве R^4 переменных $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4)$:

$$J(\mathbf{u}) = \langle \mathbf{c}, \mathbf{u} \rangle \rightarrow \inf, \quad \mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{u} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{c} = (-2, -1, -3, -1), \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

В качестве начального приближения возьмите точку $\mathbf{v}_0 = (0, 0, 1, 1)$. На каждом шаге указывайте найденное вами очередное приближение \mathbf{v}_k и соответствующее значение функции $J(\mathbf{v}_k)$.

2. С помощью **классического метода Ньютона** с постоянным шагом $\alpha_k = 1$ решите следующую задачу минимизации без ограничений в бесконечномерном гильбертовом пространстве H :

$$J(\mathbf{u}) = \mathbf{a}\|\mathbf{u} - \mathbf{f}\|^4 + \mathbf{b}\|\mathbf{u} - \mathbf{g}\|^2 \rightarrow \inf, \quad \mathbf{u} \in H.$$

В качестве начального приближения возьмите точку u_0 . Найдите следующие приближения. Остановите вычисления при первом попадании во множество оптимальных решений. Индивидуальные варианты заданий различаются коэффициентами $a, b \in R^1$ и элементами $f, g, u_0 \in H$.

Критерии оценок

Количество выполненных заданий	1	2
Оценка	4.0	5.0

6.2. Типовые контрольные задания или иные материалы для проведения промежуточной аттестации по дисциплине, критерии и шкалы оценивания

Вопросы к экзамену

1. 1. Классическая теорема Вейерштрасса в конечномерном пространстве и ее обобщение на случай полунепрерывного снизу функционала в гильбертовом пространстве.
2. Теорема Вейерштрасса для слабо полунепрерывных снизу функционалов. Достаточные условия слабой полунепрерывности снизу и слабой компактности. Слабая полунепрерывность снизу квадратичного функционала. Слабая компактность невырожденного эллипсоида.
3. Элементы дифференциального исчисления в гильбертовых пространствах. Первая и вторая производные квадратичного функционала. Производная сложной функции. Формулы конечных приращений.
4. Линейные задачи оптимального управления с квадратичными критериями качества: существование решений и дифференцируемость функционалов.
5. Выпуклые и сильно выпуклые функции. Теорема о локальном минимуме выпуклых функций. Условие оптимальности для дифференцируемого функционала в форме вариационного неравенства.
6. Критерии выпуклости и сильной выпуклости для функций, имеющих первые и вторые производные.
7. Теорема Вейерштрасса для сильно выпуклых функционалов в гильбертовом пространстве. Условия сильной выпуклости квадратичного функционала.
8. Проекция точки на множество. Существование и единственность проекции на выпуклое замкнутое множество в гильбертовом пространстве. Характеризация проекции вариационным неравенством. Свойство нестрогой сжимаемости оператора проектирования. Проекционная форма критерия оптимальности.
9. Метод скорейшего спуска. Оценка скорости сходимости для сильно выпуклых функций. Метод скорейшего спуска для квадратичных функционалов; явные расчетные формулы для шага спуска.

10. Метод проекции градиента. Оценка скорости сходимости метода проекции градиента с постоянным шагом для сильно выпуклых функций.
11. Метод условного градиента. Оценки скорости сходимости для выпуклых и сильно выпуклых функций.
12. Метод Ньютона. Оценка скорости сходимости для сильно выпуклых функций.
13. Метод сопряженных направлений (градиентов) в конечномерном пространстве для квадратичных сильно выпуклых функций.
Применение метода к функционалам общего вида в гильбертовых пространствах.
14. Каноническая задача линейного программирования; критерий угловой точки для канонической задачи.
15. Симплекс-метод для канонической задачи линейного программирования.

ШКАЛА И КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ результатов обучения (РО) по дисциплине				
Оценка	2 (не зачтено)	3 (зачтено)	4 (зачтено)	5 (зачтено)
виды оценочных средств				
Знания <i>(виды оценочных средств: опрос, тесты)</i>	Отсутствие знаний	Фрагментарные знания	Общие, но не структурированные знания	Сформированные систематические знания
Умения <i>(виды оценочных средств: практические задания)</i>	Отсутствие умений	В целом успешное, но не систематическое умение	В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы умение (допускает неточности не принципиального характера)	Успешное и систематическое умение
Навыки (владения, опыт деятельности) <i>(виды оценочных средств: выполнение и защита курсовой работы, отчет по практике, отчет по НИР и т.п.)</i>	Отсутствие навыков (владений, опыта)	Наличие отдельных навыков (наличие фрагментарного опыта)	В целом, сформированные навыки (владения), но используемые не в активной форме	Сформированные навыки (владения), применяемые при решении задач

7. Ресурсное обеспечение:

7.1. Перечень основной и дополнительной литературы

Основная литература

1. Ионкин, Николай Иванович, Численные методы : курс лекций. / Н. И. Ионкин ; Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова, Фак. вычисл. математики и кибернетики. - М. : МАКС Пресс : Изд. отд. фак. ВМиК МГУ им. М. В. Ломоносова, 2016. - 206. [1] с.
2. Бахвалов, Николай Сергеевич, Численные методы : Решения задач и упражнения : учеб. пособие для студентов вузов. / Н. С. Бахвалов, А. А. Корнев, Е. В. Чижонков ; Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова. - М. : Лаб. знаний, 2016. - 352 с.

Дополнительная литература

1. Васильев Ф. П., Потапов М. М., Будаков Б. А., Артемьева Л. А. Методы оптимизации: учебник и практикум для бакалавриата и магистратуры. М., Издательство Юрайт, 2016.
2. Кудрявцев, Константин Яковлевич, Методы оптимизации : учеб. пособие для вузов. / К. Я. Кудрявцев, А. М. Прудников ; Нац. исслед. ядер. ун-т "МИФИ". - М. : Юрайт, 2019. - 141, [1] с.
3. Сухарев, Алексей Григорьевич, Численные методы оптимизации : учеб. и практикум для акад. бакалавриата. / А. Г. Сухарев, А. В. Тимохов, В. В. Федоров. - М. : Юрайт, 2016. - 367, [1] с

7.2. Перечень лицензионного программного обеспечения, в том числе отечественного производства

При реализации дисциплины может быть использовано следующее программное обеспечение:

1. Программный продукт Red Hat Enterprise Linux Server for HPC Compute Node for Power, LE, Self-support
2. Программный продукт Red Hat Enterprise Linux Server for HPC Head Node for Power, LE, Standard
3. Операционная система SUSE Linux Enterprise Server 11 SP4 for x86_64
4. Операционная система Red Hat Enterprise Linux Server 5.0 for x86_64
5. Операционная система SUSE Linux Enterprise Server 10 SP3 for ppc64
6. Операционная система Ubuntu 18.04.
7. Программное обеспечение для виртуализации Oracle VM VirtualBox

8. Операционная система ALTLinuxMATEStarterkit 9 лицензияGPL
9. Программный продукт JetBrains IntelliJ IDEA Community Edition Free Educational Licenses
10. Программный продукт JetBrainsPyCharm Community Edition Free Educational Licenses
11. Программный продукт JetBrainsCLion Community Edition Free Educational Licenses
12. Программный продукт UPPAAL (<http://www.uppaal.org/>) академическая лицензия
13. Программный продукт Java 8 (64-bit)Oracle Corporation
14. Программный продукт Java SE Development Kit 8(64-bit) Oracle Corporation
15. Программный продукт NetBeans IDE 8.2 NetBeans.org
16. Программный продукт Dev-C++ Bloodshed Software
17. Программный продуктCodeBlocksThe Code::Blocks Team
18. Программный продукт Free Pascal 3.0.0Free Pascal Team
19. Программный продукт Python 3.5.1 (64-bit)Python Software Foundation
20. Программный продукт R for Windows 3.2.2 R Core Team
21. Программный продуктHaskell Platform 7.10.3 Haskell.org
22. Операционная система Microsoft Windows 7 корпоративная академическая лицензия
23. Операционная система Microsoft Windows 10 Education академическая лицензия
24. Программный продукт Microsoft ProjectProfessional 2013 академическая лицензия
25. Программный продукт Microsoft VisioProfessional 2013 академическая лицензия
26. Программный продуктMicrosoft VisualStudioProfessional 2013 - RUS [Русский (Россия)] академическая лицензия

7.3. Перечень профессиональных баз данных и информационных справочных систем

1. <http://www.edu.ru> – портал Министерства образования и науки РФ
2. <http://www.ict.edu.ru> – система федеральных образовательных порталов «ИКТ в образовании»
3. <http://www.openet.ru> - Российский портал открытого образования
4. <http://www.mon.gov.ru> - Министерство образования и науки Российской Федерации
5. <http://www.fasi.gov.ru> - Федеральное агентство по науке и инновациям

7.4. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»

1. Math-Net.Ru [Электронный ресурс] : общероссийский математический портал / Математический институт им. В. А. Стеклова РАН ; Российская академия наук, Отделение математических наук. - М. : [б. и.], 2010. - Загл. с титул. экрана. - Б. ц.

URL: <http://www.mathnet.ru>

2. Университетская библиотека Online [Электронный ресурс] : электронная библиотечная система / ООО "Директ-Медиа" . - М. : [б. и.], 2001. - Загл. с титул. экрана. - Б. ц. URL: www.biblioclub.ru

3. Универсальные базы данных East View [Электронный ресурс] : информационный ресурс / East View Information Services. - М. : [б. и.], 2012. - Загл. с титул. экрана. - Б. ц.

URL: www.ebiblioteka.ru

4. Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU [Электронный ресурс] : информационный портал / ООО "РУНЭБ" ; Санкт-Петербургский государственный университет. - М. : [б. и.], 2005. - Загл. с титул. экрана. - Б. ц.

URL: www.eLibrary.ru

7.5. Описание материально-технического обеспечения.

Филиал МГУ в г.Сарове, ответственный за реализацию данной Программы, располагает соответствующей материально-технической базой, включая современную вычислительную технику, объединенную в локальную вычислительную сеть, имеющую выход в Интернет.

Используются специализированные компьютерные классы, оснащенные современным оборудованием. Материальная база факультета соответствует действующим санитарно-техническим нормам и обеспечивает проведение всех видов занятий (лабораторной, практической, дисциплинарной и междисциплинарной подготовки) и научно-исследовательской работы обучающихся, предусмотренных учебным планом.

8. Соответствие результатов обучения по данному элементу ОПОП результатам освоения ОПОП указано в Общей характеристике ОПОП.

9. Разработчик (разработчики) программы.

чл.-корр.РАН, к.ф.-м.н. М.В.Якобовский