Общий список задач к ГЭ.

Теория групп:

1. Найти ядро гомоморфизма φ: $U(1) \to U(1)$, заданного уравнение $\varphi(z) = z^n$, где $z \in C, |z| = 1$, а n – целое число, $n \in Z$.

Решение:

Ядро гомоморфизма – это множество элементов группы, отображаемых в единицу:

$$ker\,\varphi = \{z \in U(1), z^n = 1\}.$$

Таким образом, ядро рассматриваемого гомоморфизма состоит из комплексных чисел, удовлетворяющих уравнению $z^n = 1$, т.е. являющихся корнями степени n из единицы. Множество корней степени n из единицы образует группу Z_n. Поэтому $ker\,\varphi = ¿\, Z_n$.

2. Найти собственные значения оператора $L_z + a L_x, a \in R$, в пространстве неприводимого представления группы SU(2) со спином l.

Решение:

Представим оператор $L_z + a L_x$ в виде

$$c = \sqrt{1+a^2}\vec{L}\vec{n}\,, \vec{n} = \left(\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}\right), \vec{n}^2 = 1.$$

Собственные значения оператора проекции момента на любую ось те же, что и собственные значения оператора L_z. Поэтому, собственные значения оператора $L_z + a L_x$ суть $\sqrt{1+a^2}\,m$, где m пробегает значения от – l до l с шагом 1.

ОТО

1. Доказать, что движение точечной частицы в поле Шварцшильда является плоским

   Нужно показать, что метрика Шварцшильда

   $$ds^2 = \Delta dt^2 - dr^2/\Delta - r^2(d\theta^2 + \sin\theta^2 d\varphi^2), \quad \Delta = 1 - r_g/r$$

   имеет группу изометрии $SO(3)$. Вычислив символы Кристоффеля

   $$\Gamma^r_{tt} = \frac{\Delta r_g}{2r^2},\ \Gamma^t_{tr} = -\Gamma^r_{rr} = \frac{r_g}{2\Delta r^2}, \quad \Gamma^r_{\theta\theta} = -r\Delta, \quad \Gamma^r_{\varphi\varphi} = -r\sin^2\theta\Delta,$$

   $$\Gamma^\theta_{r\theta} = \Gamma^\varphi_{r\varphi} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^\theta_{\varphi\varphi} = -\sin\theta\cos\theta, \quad \Gamma^\varphi_{\theta\varphi} = \operatorname{ctg}\theta,$$

   можно показать что векторы

   $$L^1 = -\cos\varphi\partial_\theta + \operatorname{ctg}\theta\partial_\varphi, \quad L^2 = \sin\varphi\partial_\theta + \operatorname{ctg}\theta\partial_\varphi, \quad L^3 = -\partial_\varphi,$$

   образующие алгебру $so(3)$

   $$[L^i, L^j] = \epsilon^{ijk} L^k,$$

   являются векторами Киллинга

   $$\nabla_\nu L^i_\mu + \nabla_\mu L^i_\nu = 0,$$

   и значит свертка касательного вектора к геодезической $\dot{x}^\mu$ с каждым из них является интегралом движения: $I^i = \dot{x}^\mu L^i_\mu,\ \ dI^i/ds = 0$. Эти три интеграла образуют вектор в трехмерном евклидовом пространстве, в которое можно погрузить единичную сферу. Плоскость движения будет ортогональна этому вектору.

2. Вычислить тензор кривизны и тензор Риччи единичной трехмерной сферы S^3.

   Это пространство является максимально симметричным, поэтому для него тензор кривизны и тензор Риччи выражаются через метрику следующим образом

   $$R_{\mu\nu\lambda\tau} = \frac{R}{6}(g_{\mu\lambda}g_{\nu\tau} - g_{\mu\tau}g_{\nu\lambda}), \quad R_{\nu\tau} = \frac{R}{3},$$

   где R скаляр кривизны. Элемент на трехмерной сфере параметризуется углами $0 \le \psi \le \pi,\ \ 0 \le \theta \le \pi,\ \ 0 \le \varphi \le 2\pi$ следующим образом

   $$dl^2 = d\psi^2 + \sin^2\psi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2),$$

   откуда прочитывается метрический тензор, индексы $\mu, \nu, \ldots$ пробегают значения $\psi,\ \theta,\ \varphi$.

3. Записать уравнения Максвелла для 4-потенциала в ковариантной калибровке Лоренца в невакуумном гравитационном поле.

   Уравнения Максвелла в искривленном пространстве-времении записываются в виде

   $$\nabla_\nu F^{\mu\nu} = -4\pi j^\mu$$

   где $F_{\nu\mu} = \nabla_\nu A_\mu - \nabla_\mu A_\nu$. Выбираем ковариантную калибровку Лоренца $\nabla_\nu A^\nu = 0$. Имеем:

   $$\nabla_\nu(\nabla^\mu A^\nu - \nabla^\nu A^\mu) = \nabla^\mu\nabla_\nu A^\nu + [\nabla_\nu, \nabla^\mu]A^\nu - \nabla_\nu\nabla^\nu A^\mu$$

   Учитывая ковариантное постоянство метрики и тождество Риччи,

   $$[\nabla_\nu, \nabla_\mu]A^\nu = -R^\nu_{\lambda\nu\mu}A^\lambda = -R_{\lambda\mu}A^\lambda,$$

   получаем:

   $$\Box A^\mu + R^\mu_\lambda A^\lambda = 4\pi j^\mu, \quad \Box = \nabla_\nu\nabla^\nu$$

4. Найти предельное значение прицельного параметра, при котором фотон еще отклоняется в поле Шварцшильда и не захватывется черной дырой.

   Рассмотрим движение в экваториальной плоскости, где метрика Шварцшильда индуцирует трехмерную метрику

   $$ds^2 = \Delta dt^2 - dr^2/\Delta - r^2 d\varphi^2, \quad \Delta = 1 - r_g/r.$$

   Эта метрика имеет векторы Киллинга ∂_t, ∂_φ порождающие первые интегралы геодезических $x^\mu(\tau)$, где τ некоторый афинный параметр, – энергию и угловой момент

   $$E = \dot{t} g_{tt}, \ \ L = -\dot{\varphi} g_{\varphi\varphi},$$

   отношение которых является прицельным параметром $b = L/E$. Запишем условие изотропности мировой линии фотона $g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0$:

   $$\dot{t}^2\Delta - \dot{r}^2/\Delta - \dot{\varphi}^2 r^2 = 0$$

   Выражая $\dot{t}$, $\dot{\varphi}$ через интегралы движения, получаем уравнение для определения радиального движения в виде

   $$\dot{r}^2 + U = E^2, \qquad U = \Delta L^2/r^2$$

   Это можно понимать как уравнение энергии, где U потенциальная энергия. Уравнение допускает круговые орбиты фотонов, для чего должны выполняться условия

   $$U = E^2, \ \ U' = 0.$$

   Разрешая эти условия находим радиус неустойчивой (поскольку соответствует максимуму потенциала) фотонной орбиты

   $$r_\gamma = \frac{3}{2} r_g$$

   Фотон прилетающий из бесконечности не может попасть на круговую орбиту, поскольку для этого его нужно посадить на нее и толкнуть по касательй. Но он может сделать несколько оборотов по близкойтраетории и потом уйти на бесконечнось, либо же упасть в черную дыру. Окружность $r = r_\gamma$ является границей между этимии двумя типами движений. Ей соответствует определенное соотношение медлу моментом и энергией $E^2 = U(r_\gamma)$, откуда следует искомое критическое значение прицельного параметра

   $$b = \frac{3\sqrt{3}}{2} r_g$$

5. За какое собственное время массивная частица, радиально падающая в черную дыру Шварцшильда из точки $r = 5r_g$, долетит до горизонта

   Выбираем движение в экваториальной плоскости, и переменые как в задаче 4. Для массивной частицы квадрат касательного вектора, при выборе параметра $\tau = s/m$, где s интервал, m масса, будет иметь вид $g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = m^2$. Поэтому получаем уравнение радиального движения $L = 0$ в виде

   $$\dot{r}^2 = E^2 - m^2\Delta$$

Отсюда получаем

$$d\tau = \frac{dr}{\sqrt{E^2 - m^2(1 - r_g/r)}} = \frac{ds}{m}$$

Поэтому искомый интервал собственного времени движения δs из точки $r_0 > r_g$ до точки r_g будет равен

$$\delta s = \int_{r_g}^{r_0} \frac{mdr}{\sqrt{E^2 - m^2(1 - r_g/r)}}.$$

Этот табличный интеграл конечен.

КХД:

1. Вычислить цветовой фактор в сечении рассеяния кварка на кварке (просуммированный по цветам конечных кварков и усреднённый по цветам начальных кварков) для t-канальной диаграммы.

2. Вычислить цветовой фактор для интерференционного члена в сечении рассеяния (просумированного по цветам конечных кварков и усредненного по цветам начальных кварков), отвечающего t-канальной диаграмме рассеяния кварка на кварке того же аромата.
3. Вычислить цветовой фактор в сечении рассеяния кварка на глюоне (просуммированного по цветам конечных и усредненного по цветам начальных частиц) для амплитуды, даваемой s-канальной диаграммой.
4. Вычислить цветовой фактор в сечения рассеяния кварка на глюоне (просуммированного по цветам конечных и усредненного по цветам начальных частиц) для амплитуды, даваемой t-канальной диаграммой.

КТП

Задача 1

Пусть $S_{\rm int}$ часть действия, описывающая взаимодействия полей, Используя формулу для эффективных вершин теории

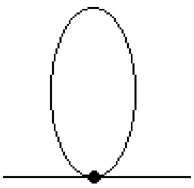
$$\Gamma_\mu(p_1;p_2;p_3)(2\pi)^4\delta(p_1+p_2+p_3)=i\,\frac{\delta^{(3)}S_{\rm int}}{\delta\bar\psi(p_1)\delta\psi(p_2)\delta A_\mu(p_3)}$$

, покажите, что вершина взаимодействия квантовой электродинамики равна $-ieQ\gamma_\mu$.

Задача 2

С помощью размерной регуляризации в теории φ^4 с константой связи λ вычислить диаграмму

«головастик»:



Окончательный результат выразить через гамма-функции.

Указание: Для упрощения вычислений использовать для пропагатора альфа-представление:

$$\frac{1}{(k^2-m^2)^\lambda}=\frac{(-i)^\lambda}{\Gamma(\lambda)}\int_0^\infty d\alpha\,\alpha^{\lambda-1}\exp\left(i\alpha(k^2-m^2)\right)$$

а для вычисления петлевого интеграла – формулу гауссового интегрирования в d-измерениях.

$$\int d^d k \exp\left\{-i\left(Ak^2+2Bk\right)\right\} = i\left(\frac{\pi}{iA}\right)^{d/2}\exp\left\{-i\frac{B^2}{A}\right\}$$

Гидродинамика, ударные и детонационные волны (часть 1)

Задачи.

1. Рассчитать разность давлений в цилиндрической трубе, если объемный расход воды составляет 10 куб. см в секунду, а радиус трубы – 1 см, длина трубы-1м. Сделать выводы о возможности применения модели ламинарного течения.
2. Рассчитать скорость всплытия маленького газового пузырька в жидкости. Задан радиус пузырька и все параметры жидкости. До какого радиуса пузырек можно считать «маленьким», то есть применима формула Стокса? Рассчитать этот радиус для воды.
3. В ударной трубе в камере низкого давления установлено давление p_0 для газа с показателем адиабаты γ_1, в камере высокого давления – давление p_2 для газа с показателем адиабаты γ_2. Температура везде равна T_0. После разрыва диафрагмы была измерена скорость ударной волны и вычислено число Маха, то есть число Маха ударной волны М>>1 также известно. Найти отношение температур на контактном разрыве. Показатели адиабаты в газах считать постоянными.

Физическая кинетика

Задача 1.

Вычислить среднее значение отклонения от точки детерминированности

<y-x> в одномерном случае, когда функция распределения имеет вид

$$\omega(y \vee x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\exp\{-\frac{(y-x)^2}{4Dt}\}$$

Задача 2.

Вычислить средний квадрат отклонения от точки детерминированности

<$(y-x)^2$> в одномерном случае, когда функция распределения имеет вид

$$\omega(y \vee x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\exp\{-\frac{(y-x)^2}{4Dt}\}$$

Задача 3.

При каких условиях плотность вероятности перехода

$$\omega(y \vee x . t) = \frac{1}{\left(\sqrt{4\pi Dt}\right)^3}\exp\{-\frac{(y-x)^2}{4Dt}\}$$

удовлетворяет уравнению Фоккера-Планка. Обратить внимание на то что

y и x –трехмерные вектора.

Задача 4.

Показать, что уравнение Больцмана необратимо, т.е. что если F(**x**, **v**, t) –решение, то F(**x**, -**v**, -t) не обязано быть решением

Задачи (решения) к гос. экзамену по курсу **“Гидродинамика, ударные и детонационные волны, часть 2”:**

1. **В ударной трубе в камере низкого давления установлено давление p_0 для газа с показателем адиабаты γ_1, в камере высокого давления – давление p_2 для газа с показателем адиабаты γ_2. Температура везде равна T_0. После разрыва диафрагмы была измерена скорость ударной волны и вычислено число Маха, то есть число Маха ударной волны M>>1 также известно. Найти температуру на контактном разрыве со стороны толкающего газа. Показатели адиабаты в газах считать постоянными.**

   Решение.
   Давление на контактном разрыве p_1 находится из числа Маха. Оно одинаково по обе стороны разрыва и равно
   $$\frac{p_1}{p_0} \approx \frac{2\gamma_1 M^2}{\gamma_1 + 1}$$
   Температуру со стороны толкающего газа на контактном разрыве T_{12} определяем из изоэнтропы для волны разрежения
   $$T_{12}^{\gamma_2} p_1^{1-\gamma_2} = T_0^{\gamma_2} p_2^{1-\gamma_2}$$
   То есть искомая температура равна
   $$T_{12} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1-\gamma_2}{\gamma_2}} T_0 = \left(\frac{p_2}{p_0}\frac{\gamma_1+1}{2\gamma_1 M^2}\right)^{\frac{1-\gamma_2}{\gamma_2}} T_0$$

2. **Найти условия теплового взрыва в задаче Семенова, то есть точку, где прямая теплоотвода касается кривой тепловыделения. Выполнено условие для энергии активации E/(RT)>>1.**

   Решение.
   Условия теплового взрыва в задаче Семенова определяются равенством тепловых потоков и равенством их производных по температуре (точка касания), то есть

   $$\alpha S(T^* - T_0) = Q_0 \exp\left(-\frac{E}{RT^*}\right) \quad (1)$$
   $$\alpha S = \frac{Q_0 E}{RT^{*2}} \exp\left(-\frac{E}{RT^*}\right) \quad (2)$$
   Из (1,2), исключая экспоненту, получим квадратное уравнение для температуры в точке теплового взрыва
   $$E\left(T^{*} - T_0\right) = \mathrm{RT}^2 \quad (3)$$
   Решение (3) с учетом области решения $E/(RT^*)>>1$ имеет вид
   $$T^* = \frac{E - \sqrt{E^2 - 4ERT_0}}{2R} \approx T_0\left(1 + \frac{RT_0}{E}\right)$$

3. **На некотором расстоянии L от центра взрыва измерена скорость ударной волны и давление на волне. Рассчитать в рамках теории точечного взрыва для сферической волны, на каком расстоянии давление в ударной волне уменьшится в 8 раз. Рассчитать, на каком расстоянии скорость в ударной волне уменьшится в 8 раз. Что ограничивает применение аналитической теории, то есть каким должны быть давление и скорость в первой точке для первого и второго расчета?**

Решение. Для сферического случая автомодельная переменная имеет вид $z=\frac{r}{t^{a}}=\frac{r}{t^{2/5}}$ *Зависимость давления на ударной волне от расстояния в этом случае вид* $p\sim\frac{r^{2}}{r^{2/a}}=r^{-3}$*. Поэтому давление упадет в 8 раз на расстоянии 2L.*

Скорость $v_0\sim\frac{r}{r^{1/a}}=r^{-3/2}$*. То есть скорость уменьшается в 8 раз на расстоянии 4L.*

Условием применимости приближения является условие сохранения сильной ударной волны, то есть давление во второй точке должно быть много больше давления в окружающей среде, а число Маха- много больше единицы. Поэтому для выполнения условий первого расчета в первой точке давление должно существенно превышать $8p_0$*, а для второго расчета - число Маха в первой точке должно быть существенно больше 8.*

Современные проблемы физики, ч.1

1. Определить энергию фотонов, рассеянных назад при столкновении релятивистских электронов $E_e \gg m_e c^2$ с лазерными фотонами $E_\gamma \sim 1$ эВ (обратный Комптон-эффект).

2. В коллайдере LHeC (одна из предложенных модификаций БАК, ЦЕРН) электронный пучок 60 ГэВ будет сталкиваться с протонным пучком 7 ТэВ. Рассчитать полную энергию столкновения в системе центра масс и оценить, какая энергия электронного пучка потребовалась бы для создания эквивалентной установки с фиксированной мишенью.

3. а) Возможно ли протекание реакции $p+\bar{p}\rightarrow\bar{\Lambda}+\Lambda$ на неподвижной протонной мишени при кинетической энергии антипротонов 0.75 ГэВ. б) Какие должны быть минимальные энергии встречных пучков для того, чтобы реализовать эту реакцию. Массы в энергетических единицах m_p = 938.27 МэВ, m_Λ= 1115.63 МэВ.

4. При каких относительных орбитальных моментах количества движения протона возможна ядерная реакция $p + {}^{7}\mathrm{Li} \rightarrow {}^{8}\mathrm{Be}^{*} \rightarrow \alpha + \alpha$?

Теоретическая космология

1. В модели ΛCDM вычислить при каком красном смещении z происходит переход от замедленного расширения Вселенной к ускоренному. Дать численную оценку z.
2. Вычислить возраст гипотетической Вселенной без Λ -члена, но с пространственной кривизной. Считать современное значение параметра Хаббла таким же, как в

нашей Вселенной (H_0 =1.42* 10^{10} лет). Найти численный ответ при Ω_M=0.3 и Ω_K=0.7.